



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE INGENIERÍA

MAESTRÍA EN SIMULACIÓN NUMÉRICA Y CONTROL
Trabajo práctico 3:
ELASTO-PLASTICIDAD — VON MISES

Curso:
Elementos Finitos Avanzados en Sólidos

Estudiante:
Freddy Andrés Mercado Navarro
DNI: 94.872.342

Profesor titular:
Eduardo Dvorkin

Clases Prácticas:
José Gabriel Hasbani

16 de febrero de 2014
Buenos Aires, Argentina

Resumen

En este trabajo práctico se implementó la teoría de elasto-plasticidad combinada con la teoría de la Formulación Lagrangeana Total para modelar la deformación de un elemento finito. En el primer capítulo se realiza la modelación para un material elasto-plástico con plasticidad perfecta, en el segundo, con endurecimiento isótropo, y en el tercero se resuelve el problema aplicando deformaciones en lugar de cargas.

El algoritmo predictor-corrector implementado recibe el nombre de Mapeo de Retorno Radial, el cual corrige las tensiones calculadas en los puntos de Gauss para ajustarlas a la superficie de fluencia.

Índice general

1. Planteamiento del Problema	4
1.1. Ejercicio 1	4
1.2. Ejercicio 2	4
2. Teoría	5
2.1. Algoritmo de Retorno Radial	5
2.2. Módulos	7
2.3. Criterio de fluencia de Von Mises	7
2.4. Transformación al espacio de tensiones principales	7
2.4.1. Estado plano de deformaciones	8
2.5. Error relativo porcentual	8
3. Ejercicio 1: Aplicación de cargas	9
3.1. Caso 1 (no plastifica)	9
3.2. Caso 2 (plastifica PG3)	10
3.2.1. Plasticidad perfecta (plastifica PG3)	11
3.2.2. Endurecimiento Isótropo (plastifica PG3)	13
3.2.3. Error relativo entre TLF y TLF con Elasto-Plasticidad	14
3.3. Caso 3 (plastifica PG1)	15
3.3.1. Plasticidad perfecta (plastifica PG1)	18
3.3.2. Endurecimiento Isótropo (plastifica PG1)	19
3.3.3. Error relativo entre TLF y TLF con Elasto-Plasticidad	20
4. Ejercicio 2: Aplicación de deformaciones	22
4.1. Caso 1 (no plastifica)	22
4.2. Caso 2 (no plastifica)	24
5. Código del Retorno Radial	28
6. Comentarios y Conclusiones	31

Índice de figuras

3.1. Deformación del elemento. Caso 1, plasticidad perfecta.	9
3.2. Curva σ_{VM} vs. $\bar{\varepsilon}$. Caso 1, plasticidad perfecta, punto de Gauss 1.	10
3.3. Deformación del elemento. Caso 2, plasticidad perfecta.	10
3.4. Curva σ_{VM} vs. $\bar{\varepsilon}$. Caso 2, plasticidad perfecta, punto de Gauss 3.	11
3.5. Desplazamientos — Caso 2 — Plasticidad perfecta.	12
3.6. Deformación total — Caso 2 — Plasticidad perfecta.	12
3.7. Deformación Plástica total — Caso 2 — Plasticidad perfecta.	12
3.8. Tensiones σ_{n+1} — Caso 2 — Plasticidad perfecta.	13
3.9. Desplazamientos — Caso 2 — Endurecimiento isótropo.	13
3.10. Deformación total — Caso 2 — Endurecimiento isótropo.	13
3.11. Deformación Plástica total — Caso 2 — Endurecimiento isótropo.	14
3.12. Tensiones σ_{n+1} — Caso 2 — Endurecimiento isótropo.	14
3.13. Tensiones $\sigma_{Y(n+1)}$ — Caso 2 — Endurecimiento isótropo.	14
3.14. Tensiones de Von Mises para cada paso de carga — Caso de cargas 2 — PG3 — a) TLF+EP (izq.) y b) TLF (der.)	15
3.15. Deformación del elemento. Caso 3, endurecimiento isótropo.	16
3.16. Curva σ_{VM} vs. $\bar{\varepsilon}$. Caso 3. Endurecimiento isótropo. Punto de Gauss 1.	16
3.17. Curva σ_{VM} vs. $\bar{\varepsilon}$. Caso 3. Endurecimiento isótropo. PG 1. Puntos de retorno radial sobre línea de endurecimiento isótropo.	17
3.18. Retorno Radial. Tensiones de Cauchy y Desviadoras en espacio de tensiones principales. Caso 3. Endurecimiento isótropo.	18
3.19. Deformación total — Caso 3 — Plasticidad perfecta.	18
3.20. Deformación Plástica total — Caso 3 — Plasticidad perfecta.	19
3.21. Tensiones σ_{n+1} — Caso 3 — Plasticidad perfecta.	19
3.22. Deformación total — Caso 3 — Endurecimiento isótropo.	19
3.23. Deformación Plástica total — Caso 3 — Endurecimiento isótropo.	20
3.24. Tensiones σ_{n+1} — Caso 3 — Endurecimiento isótropo.	20
3.25. Tensiones $\sigma_{Y(n+1)}$ — Caso 3 — Endurecimiento isótropo.	20
3.26. Tensiones de Von Mises para cada paso de carga — Caso de cargas 3 — PG1.	21
4.1. Deformación del elemento — Caso 1 — Plasticidad perfecta.	22
4.2. Curva σ_{VM} vs. $\bar{\varepsilon}$ — Caso 1 — Plasticidad perfecta.	23
4.3. Desplazamiento — Caso 1.	23
4.4. Deformación total — Caso 1.	23
4.5. Tensiones σ_{n+1} — Caso 1.	24
4.6. Fuerzas Equivalentes a tensiones — Caso 1.	24
4.7. Deformación del elemento — Caso 2.	25

4.8. Curva σ_{VM} vs. $\bar{\varepsilon}$ — Caso 2.	25
4.9. Desplazamientos — Caso 2.	26
4.10. Deformación total — Caso 2.	26
4.11. Tensiones σ_{n+1} — Caso 2.	26
4.12. Fuerzas Equivalentes a tensiones — Caso 2.	27

Capítulo 1

Planteamiento del Problema

Al problema de la Serie de Ejercicios 2 agregarle plasticidad asumiendo:

- Grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones.
- Material elasto-pástico con plasticidad perfecta: Ley de fluencia de Von Mises $\sigma_Y = 2500 \text{ kgf/cm}^2$. Ley de flujo asociado.
- Material elasto-plástico con endurecimiento isótropo. Factor de endurecimiento isótropo $K_c = 2100 \text{ kgf/cm}^2$.

1.1. Ejercicio 1

Utilizar el algoritmo desarrollado para resolver los dos casos propuestos en la Serie de Ejercicios 2:

- **Caso 1:** $F_1 = F_2 = 3000 \text{ kgf/cm}^2$; $F_3 = 0$.
- **Caso 2:** $F_1 = F_2 = 0$; $F_3 = 3000 \text{ kgf/cm}^2$.
- **Caso 3:** $F_1 = F_2 = F_3 = 3000 \text{ kgf/cm}^2$.

Discutir los resultados obtenidos comparándolos con los que se obtuvieron en la Serie de Ejercicios 2. Cuantificar, utilizando errores relativos porcentuales, el error al calcular desplazamientos, tensiones y deformaciones aceptando las hipótesis asumidas en la Serie de Ejercicios 2.

1.2. Ejercicio 2

Utilizar el algoritmo desarrollado para determinar desplazamientos, tensiones y deformaciones dados los siguientes desplazamientos nodales $[U_{(nodo,direccion)}]$:

- **Caso 1:** $U_{(1,2)} = 0,002 \text{ cm}$; $U_{(2,2)} = 0,002 \text{ cm}$.
- **Caso 2:** $U_{(1,2)} = 0,004 \text{ cm}$; $U_{(2,2)} = 0,004 \text{ cm}$.

Capítulo 2

Teoría

Se desarrollarán las ecuaciones para un caso de Deformación Plana, como está contemplado en la Serie de Ejercicios 2. La formulación del Algoritmo de Retorno Radial expuesta a continuación está en gran parte implementada siguiendo los lineamientos de la Referencia [2].

2.1. Algoritmo de Retorno Radial

Las siguientes son las ecuaciones que fueron tenidas en cuenta para la actualización de las tensiones mediante el retorno radial. Una vez que se obtienen las deformaciones totales, provenientes de un paso de carga convergido, procedemos a ejecutar la parte del código que contiene los siguientes cálculos para cada punto de Gauss del elemento:

Datos iniciales: ε_{n+1} , ε_n , ε_n^p , σ_n , κ_n (viene de σ_{Yn}).

Datos por hallar: σ_{n+1} , ε_{n+1}^p , κ_{n+1} .

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$$

$$\Delta\sigma = C\Delta\varepsilon$$

$$\sigma^{trial} = \sigma_n + \Delta\sigma$$

$$p = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\sigma^{trial})$$

$$s^{trial} = \sigma^{trial} - pI$$

$$\|s\| = \sqrt{\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}}$$

$$\kappa_n = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{Y0}$$

if $\|s\| \leq \kappa_n$

$$\sigma_{n+1} = \sigma^{trial}$$

$$\varepsilon_{n+1}^e = \varepsilon_n^e + \Delta\varepsilon$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + 0$$

elseif $\|s\| > \kappa_n$

$$\begin{aligned}\hat{n}_{n+1} &= \frac{s^{trial}}{\|s\|} \\ \Delta\lambda &= \frac{\|s\| - \kappa_n}{2G + H} \\ \sigma_{n+1} &= \sigma^{trial} - 2G\Delta\lambda \hat{n}_{n+1} \\ \kappa_n &= \kappa_n + H\Delta\lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon^p &= \Delta\lambda \hat{n}_{n+1} \\ \Delta\varepsilon^e &= \Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^p \\ \varepsilon_{n+1}^e &= \varepsilon_n^e + \Delta\varepsilon^e \\ \varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p + \Delta\varepsilon^p \\ \varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_{n+1}^e + \varepsilon_{n+1}^p\end{aligned}$$

Satisface $\varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p = 0$

end

$$\begin{aligned}\varepsilon_n^e &= \varepsilon_{n+1}^e \\ \varepsilon_n^p &= \varepsilon_{n+1}^p\end{aligned}$$

Donde:

ε : deformación total proveniente de la Formulación Lagrangeana Total.

σ : vector de tensiones de Cauchy.

σ^{trial} : vector de tensiones de prueba. Para comprobar entrada en fluencia.

s^{trial} : vector de tensiones desviadoras de prueba.

p : presión hidrostática.

I : vector delta de Kronecker.

\underline{s} : tensor de tensiones desviadoras.

κ : radio de la superficie de fluencia. Es función de σ_Y .

σ_Y : tensión de fluencia.

ε^e : vector de deformaciones elásticas.

ε^p : vector de deformaciones plásticas.

\hat{n} : vector orientado en la dirección del flujo plástico.

$\Delta\lambda$: magnitud de la deformación plástica.

G : módulo de corte para material isótropo.

H : módulo plástico generalizado.

2.2. Módulos

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$E_P = \frac{E E_T}{E - E_T}$$

$$H = \frac{2}{3} E_P$$

Donde:

E : módulo elástico.

E_P : módulo plástico.

E_T : módulo tangente.

2.3. Criterio de fluencia de Von Mises

Un punto entra en fluencia cuando su estado de tensiones equivalente hace que se satisfaga la siguiente ecuación:

$$f(\sigma, \kappa, \sigma_Y) = \sqrt{2J_2} - \kappa = \|s\| - \kappa = \bar{\sigma} - \sigma_Y = 0$$

Donde:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{s}{\underline{s}} : \frac{s}{\underline{s}}}$$

$\bar{\sigma}$: tensión de Von Mises.

2.4. Transformación al espacio de tensiones principales

Para graficar las tensiones se requiere hacerlo en el espacio de tensiones principales. Por ello se requiere transformar de un espacio de tensiones de 4 componentes a un espacio de 3.

Para un estado de tensión σ dado las tensiones principales se hallan resolviendo los ceros del siguiente polinomio de orden 3.

$$\sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0$$

donde

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

I_1 , I_2 e I_3 son los invariantes del tensor de tensiones de Cauchy y σ_p son los ceros del polinomio, los cuales corresponden a las tensiones principales.

2.4.1. Estado plano de deformaciones

Para un estado plano de deformaciones las tensiones principales son:

$$\sigma_{p1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{p2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{p3} = \sigma_z$$

Nótese que σ_z es ya una componente principal de las tensiones debido a que nos encontramos en un modelo de deformación plana.

También podemos hallar los ángulos θ que forman los ejes principales y los ejes originales.

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\theta_{p1} = \frac{\cos^{-1} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \right)}{2}$$

$$\theta_{p2} = \theta_{p1} \pm 90^\circ$$

$$\theta_{p3} = 0$$

Los planteamientos anteriores pueden ser consultados en las Referencias [1] y [2].

2.5. Error relativo porcentual

La medida de error que se utilizará para comparar los resultados del TP2 y el TP3 es:

$$\text{Error relativo porcentual} = E_{rp} = \frac{\sigma_{vmTP2} - \sigma_{vmTP3}}{\sigma_{vmTP2}}$$

Capítulo 3

Ejercicio 1: Aplicación de cargas

En este ejercicio se aplican 3 casos de carga. Se desarrollará cada caso para los modelos de plasticidad perfecta y endurecimiento isótropo. Los puntos de Gauss son: PG1(abajo,izquierda), PG2(arriba, izquierda), PG3(abajo, derecha), PG4(arriba, derecha). Para todas las simulaciones se emplearon 10 pasos de carga.

3.1. Caso 1 (no plastifica)

Para este modelo $E_T = E_P = 0$. Para este caso de carga no plastifica ningún punto de Gauss. Los estados de tensiones se mantienen dentro de la zona elástica, por lo tanto los resultados son iguales a los del Caso 1 de la Serie de Ejercicios 2 y por esta razón no se incluirán los resultados numéricos, ya que pueden ser consultados en el desarrollo del Trabajo Práctico 2.

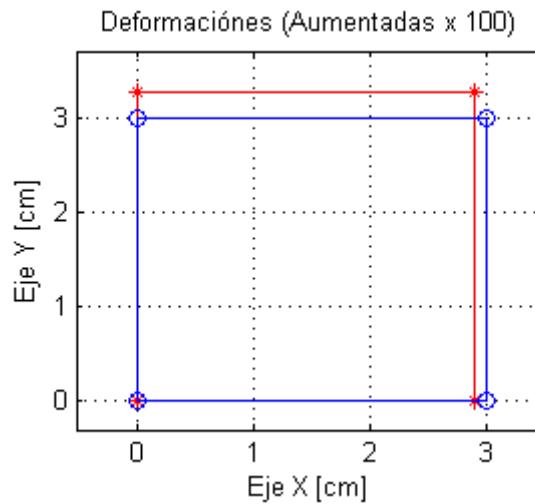


Figura 3.1: Deformación del elemento. Caso 1, plasticidad perfecta.

En la Figura 3.1 se aprecia el gráfico del elemento. En azul sus dimensiones originales, es decir, sin cargas aplicadas, y en rojo el estado deformado, mientras que en Figura 3.2 se aprecia la gráfica de tensiones y deformaciones equivalentes para el Punto de Gauss

1. Los asteriscos negros corresponden a cada punto de carga, 10 en total, uno por cada paso de carga.

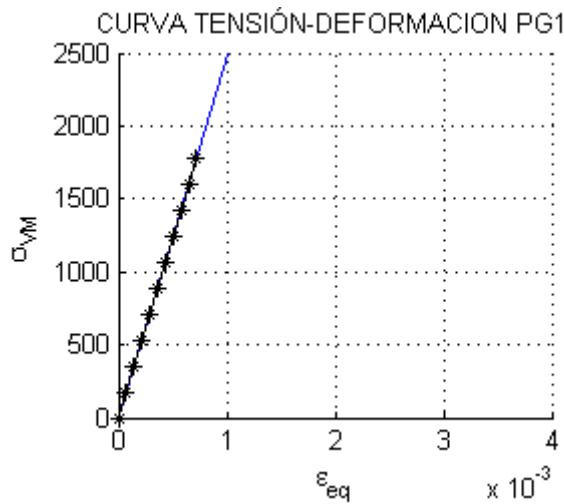


Figura 3.2: Curva σ_{VM} vs. $\bar{\varepsilon}$. Caso 1, plasticidad perfecta, punto de Gauss 1.

3.2. Caso 2 (plastificación PG3)

Para el caso de carga 2 sólo plastifica el punto de Gauss 3 por ser el único cuya tensión de Von Mises supera el valor de 2500 kgf/cm². En la Figura 3.3 se aprecian las deformaciones aumentadas 100 veces.

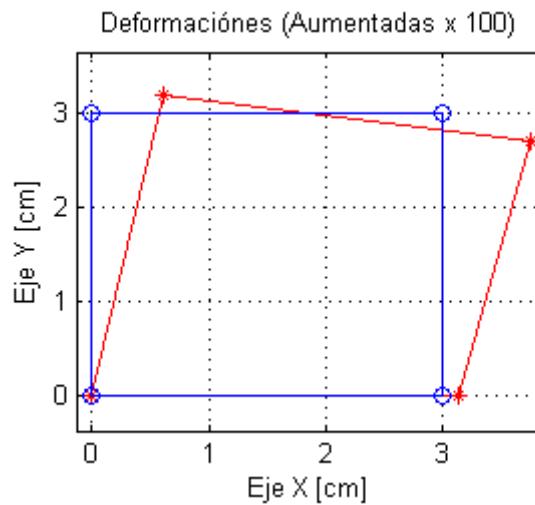


Figura 3.3: Deformación del elemento. Caso 2, plasticidad perfecta.

En la Figura 3.4 la curva deformaciones vs. tensiones equivalentes, donde podemos apreciar el efecto del algoritmo de retorno radial, que corrige las tensiones y las regresa a la curva tensión-deformación del material, equivalente de la superficie de fluencia para

un gráfico en el espacio de tensiones principales, como se aprecia más adelante en la Figura 3.18. Nótese que luego del retorno radial las pendientes de las curvas son iguales (curvas paralelas), lo que indica que $\Delta\sigma$ está siendo calculado con una ley constitutiva constante. La gráficas para el modelo de endurecimiento isótropo son muy similares y por ello no se presentan.

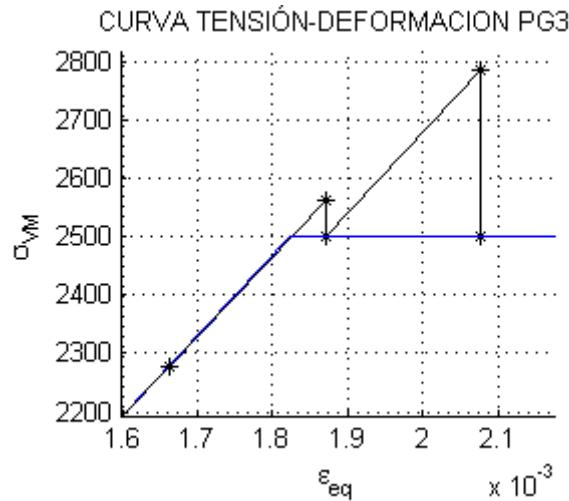


Figura 3.4: Curva σ_{VM} vs. $\bar{\varepsilon}$. Caso 2, plasticidad perfecta, punto de Gauss 3.

En la siguiente sección presentaremos los datos numéricos para cada modelo de plasticidad.

3.2.1. Plasticidad perfecta (plastifica PG3)

Para este modelo $E_T = E_P = 0$, por lo tanto no se presenta endurecimiento por deformación plástica. Los datos numéricos que se presentan en el resto del trabajo están ordenados por filas, donde a cada fila corresponde un punto de Gauss. De arriba hacia abajo, se inicia con el PG1 y se finaliza en la cuarta fila con el PG4. Para los desplazamientos las columnas corresponden en orden, de izquierda a derecha: U_{11} , U_{22} , U_{33} . Para las deformaciones ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} , ε_{33} . La deformación ε_{33} se considera debido a que al plastificar existe una componente 33 que se suma a la deformación elástica para lograr $\varepsilon_{33} = 0$ y satisfacer la suposición de deformación plana. Para las tensiones tenemos, de nuevo, columnas de izquierda a derecha: σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , σ_{33} . En la Figura 3.5 se presentan los desplazamientos del PG3, graficados en la Figura 3.3.

DISPLACEMENT <4x3 double>			
	1	2	3
1	7.4775e-03	-3.0354e-03	0
2	6.1794e-03	1.9104e-03	0
3	0	0	0
4	1.2921e-03	0	0

Figura 3.5: Desplazamientos — Caso 2 — Plasticidad perfecta.

En la Figura 3.6 se presentan las deformaciones totales, que equivalen a la suma de las deformaciones elásticas y las deformaciones plásticas. La deformación total 33 debe ser igual a cero, pero las deformaciones elásticas y plásticas no. Esto para el modelo de deformación plana.

STRAIN <4x3 double>			
	1	2	3
1	4.3127e-04	2.9056e-04	1.7126e-03
2	4.3323e-04	2.9056e-04	7.6054e-04
3	4.3127e-04	-6.6107e-04	1.7141e-03
4	4.3323e-04	-6.6107e-04	7.6295e-04

Figura 3.6: Deformación total — Caso 2 — Plasticidad perfecta.

En la Figura 3.7 observamos la deformación plástica del PG3 como la única que se presenta. Sólo para éste punto la tensión de Von Mises sobrepasó la tensión de fluencia.

STRAINP <4x4 double>				
	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	6.2312e-05	-7.1496e-05	1.0444e-04	9.1838e-06
4	0	0	0	0

Figura 3.7: Deformación Plástica total — Caso 2 — Plasticidad perfecta.

En la Figura 3.8 se encuentran las tensiones σ_{n+1} , que son las tensiones corregidas por el algoritmo de retorno radial. Como sólo plastificó el PG3 sólo las fila 3 es diferente de los resultados del mismo caso para el TP2.

SIGNMAS1 <4x4 double>				
	1	2	3	4
1	1.5771e+03	1.3427e+03	1.3855e+03	873.9029
2	1.5795e+03	1.3445e+03	615.0036	876.2730
3	323.7784	-1.2303e+03	1.2129e+03	-293.3007
4	426.8133	-1.3440e+03	612.9090	-276.0894

Figura 3.8: Tensiones σ_{n+1} — Caso 2 — Plasticidad perfecta.

3.2.2. Endurecimiento Isótropo (plastifica PG3)

Los desplazamientos y deformaciones presentados en las Figuras 3.9 y 3.10 son iguales a las del modelo de plasticidad perfecta visto en la sección anterior.

DISPLACEMENT <4x3 double>			
	1	2	3
1	7.4775e-03	-3.0354e-03	0
2	6.1794e-03	1.9104e-03	0
3	0	0	0
4	1.2921e-03	0	0

Figura 3.9: Desplazamientos — Caso 2 — Endurecimiento isótropo.

STRAIN <4x3 double>			
	1	2	3
1	4.3127e-04	2.9056e-04	1.7126e-03
2	4.3323e-04	2.9056e-04	7.6054e-04
3	4.3127e-04	-6.6107e-04	1.7141e-03
4	4.3323e-04	-6.6107e-04	7.6295e-04

Figura 3.10: Deformación total — Caso 2 — Endurecimiento isótropo.

No obstante, las deformaciones plásticas son diferentes, dado que el cálculo de las deformaciones plásticas depende de la tensión de retorno, que es menor para el modelo de endurecimiento isótropo que para el modelo de plasticidad perfecta. En otras palabras, el endurecimiento reduce las deformaciones plásticas. Basta comparar los números de las Figuras 3.11 y 3.7.

STRAINP <4x4 double>				
1	2	3	4	
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	6.2258e-05	-7.1434e-05	1.0435e-04	9.1758e-06
4	0	0	0	0

Figura 3.11: Deformación Plástica total — Caso 2 — Endurecimiento isótropo.

Las tensiones, al contrario que las deformaciones plásticas, son mayores a causa del endurecimiento. De nuevo, sólo la fila del PG3 sufrió cambios respecto al TP2 ya que los demás puntos no plastificaron. Ver Figura 3.12.

SIGNMAS1 <4x4 double>				
1	2	3	4	
1	1.5771e+03	1.3427e+03	1.3855e+03	873.9029
2	1.5795e+03	1.3445e+03	615.0036	876.2730
3	323.8657	-1.2304e+03	1.2130e+03	-293.2878
4	426.8133	-1.3440e+03	612.9090	-276.0894

Figura 3.12: Tensiones σ_{n+1} — Caso 2 — Endurecimiento isótropo.

Por último, sólo la tensión de fluencia del PG3 aumentó. Podríamos decir que el material sufrió un endurecimiento. Esto lo podemos ver en la tercera fila de la Figura 3.13.

SIGYNMAS1 <	
	1
1	1.6667e+03
2	1.6667e+03
3	1.6669e+03
4	1.6667e+03

Figura 3.13: Tensiones $\sigma_{Y(n+1)}$ — Caso 2 — Endurecimiento isótropo.

3.2.3. Error relativo entre TLF y TLF con Elasto-Plasticidad

La formulación empleada en el TP2, la Formulación Lagrangeana Total, no tiene en cuenta la actualización de tensiones debido a fluencia del material, mientras que la TLF combinada con Elasto-Plasticidad de Von Mises sí lo hace. Esto supone una diferencia entre el cálculo de las dos tensiones. Si no se presenta fluencia los desplazamientos, deformaciones y tensiones serán iguales, pero si ésta se produce habrá tensiones diferentes como resultado de la aplicación del algoritmo de retorno radial.

En la Figura 3.14 se presentan las tensiones σ_{n+1} de Von Mises. Se observa que las tensiones son iguales hasta el paso 10, donde se produce la fluencia del PG3. La tabla de la izquierda muestra las tensiones de la formulación TLF+EP, mientras que la derecha la TLF.

SIGEQ <20x1		SIGEQ <10x1	
	1		1
1	285.2089	1	285.2089
2	570.3208	2	570.3208
3	855.3358	3	855.3358
4	1.1403e+03	4	1.1403e+03
5	1.4251e+03	5	1.4251e+03
6	1.7098e+03	6	1.7098e+03
7	1.9944e+03	7	1.9944e+03
8	2.2790e+03	8	2.2790e+03
9	2.5634e+03	9	2.5634e+03
10	2.5001e+03	10	2.8477e+03
11	2.7844e+03		
12	2.5003e+03		

Figura 3.14: Tensiones de Von Mises para cada paso de carga — Caso de cargas 2 — PG3 — a) TLF+EP (izq.) y b) TLF (der.)

El error relativo entre las tensiones finales calculadas por las dos formulaciones se calculó como se indica en la sección 2.5, siendo mayor la tensión predicha por la TLF:

$$E_{rp \text{ caso2 PG3}} = 12,2 \%$$

3.3. Caso 3 (plastifica PG1)

Para este caso de cargas sólo plastificó el PG1. En la Figura 3.15 se encuentran graficados los desplazamientos, los cuales están aumentados por un factor de 100 para poder ser visualizados cómodamente.

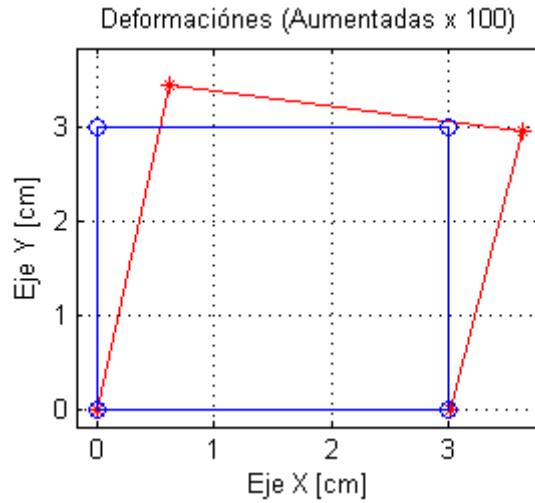


Figura 3.15: Deformación del elemento. Caso 3, endurecimiento isótropo.

En la Figura 3.16 se presenta la curva de carga (tensiones vs deformaciones equivalentes). Se observan dos retornos o correcciones de la tensión en el PG1. La pendiente con $E_T = 2100$ es demasiado leve para apreciarse, de modo que la gráfica para el modelo de endurecimiento isótropo no se presenta.

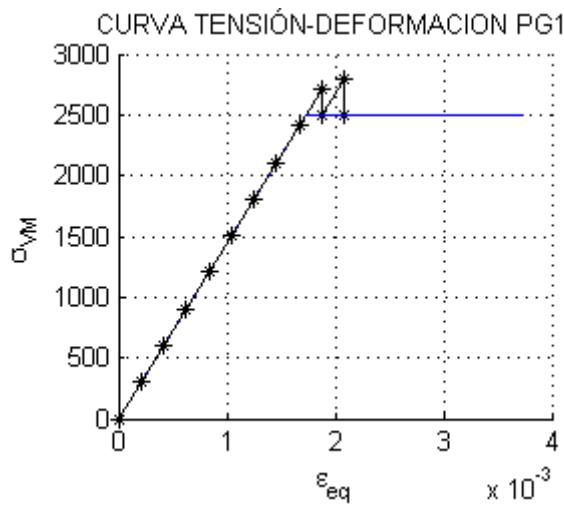


Figura 3.16: Curva σ_{VM} vs. $\bar{\varepsilon}$. Caso 3. Endurecimiento isótropo. Punto de Gauss 1.

Para demostrar que el algoritmo de retorno funciona correctamente se realizó un acercamiento al segmento de la curva con pendiente E_T . Allí se puede ver como se logra un estado de tensiones de retorno tal que las tensiones equivalentes caen sobre la línea azul de la Figura 3.17. La línea roja corresponde al modelo de plasticidad perfecta con pendiente $E_T = E_p = 0$, que intersecta al eje de tensiones en $\sigma_{Y0} = 2500$ kgf/cm².

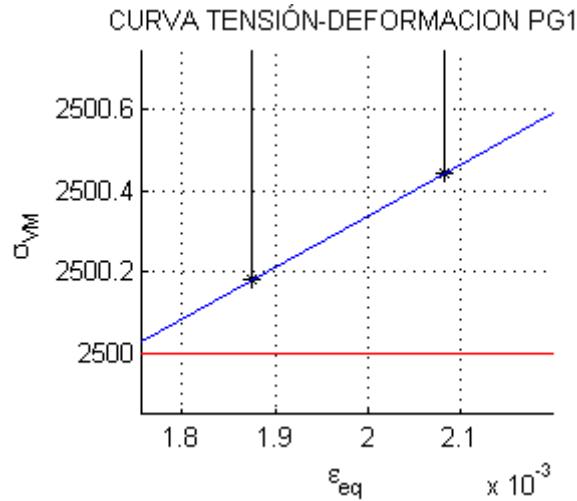


Figura 3.17: Curva σ_{VM} vs. $\bar{\varepsilon}$. Caso 3. Endurecimiento isótropo. PG 1. Puntos de retorno radial sobre línea de endurecimiento isótropo.

Durante el proceso de implementación del algoritmo de retorno radial se quiso tener la certeza del buen funcionamiento de los cálculos, por lo cual se graficaron las tensiones principales desviadoras s_{p1} , s_{p2} y s_{p3} y las tensiones principales de Cauchy σ_{p1} , σ_{p2} y σ_{p3} para visualizar el comportamiento de todo el algoritmo durante la aplicación de los pasos de carga. Los ejes de la figura corresponden a cada una de las componentes principales de la tensión. Para realizar esta transformación se emplearon las transformaciones hacia el estado de tensiones principales halladas en las Referencias [1] y [2].

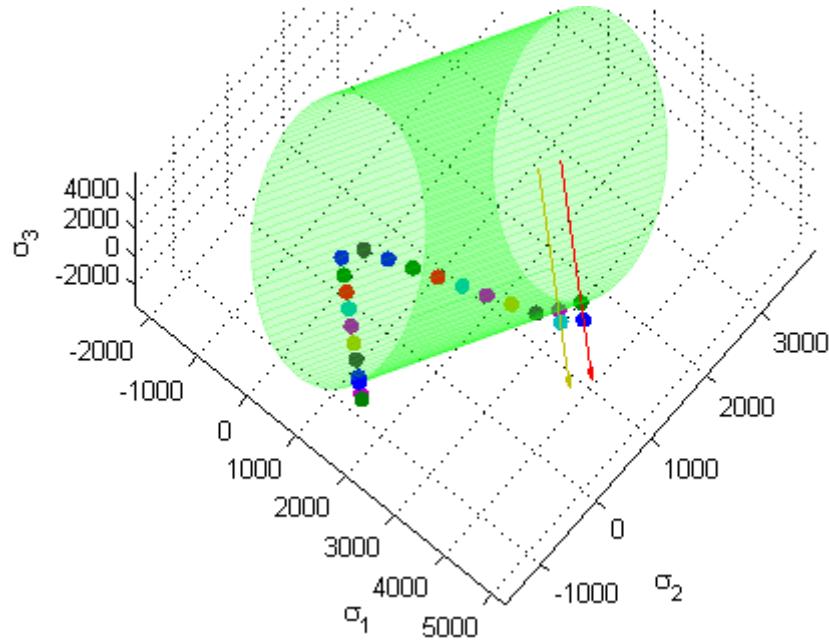


Figura 3.18: Retorno Radial. Tensiones de Cauchy y Desviadoras en espacio de tensiones principales. Caso 3. Endurecimiento isótropo.

En la Figura 3.18 se puede apreciar la superficie de fluencia (verde), la cual es un cilindro que tiene como dirección al vector $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, a las tensiones desviadoras, las cuales están sobre el plano de tensiones desviadoras, y las tensiones de Cauchy, las cuales poseen presión y salen del plano desviador. También se aprecian las flechas en dirección normal a la superficie y dos tensiones de retorno que caen sobre la superficie de fluencia.

3.3.1. Plasticidad perfecta (plastifica PG1)

Para este modelo $E_T = E_P = 0$, por lo tanto no se presenta endurecimiento por deformación. El único punto de Gauss que platificó fue el PG1. Los resultados numéricos obtenidos pueden analizarse similar a como fueron analizados los resultados del Caso de cargas 2.

STRAIN <4x3 double>			
	1	2	3
1	6.0272e-05	1.1545e-03	1.7060e-03
2	6.2216e-05	1.1545e-03	7.5797e-04
3	6.0272e-05	2.0698e-04	1.7075e-03
4	6.2216e-05	2.0698e-04	7.6036e-04

Figura 3.19: Deformación total — Caso 3 — Plasticidad perfecta.

La deformación plástica sólo afecta al PG1 como se observa en la Figura 3.20.

STRAINP <4x4 double>				
	1	2	3	4
1	-5.8173e-05	1.2715e-04	1.4522e-04	-6.8977e-05
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

Figura 3.20: Deformación Plástica total — Caso 3 — Plasticidad perfecta.

Las tensiones corregidas tras los 10 pasos de carga se encuentran en la Figura 3.21.

SIGNMAS1 <4x4 double>				
	1	2	3	4
1	1.6671e+03	3.1341e+03	1.1496e+03	1.5814e+03
2	1.5754e+03	3.3412e+03	6.1702e+02	1.4723e+03
3	4.2675e+02	6.5727e+02	1.3803e+03	3.2370e+02
4	4.2911e+02	6.5900e+02	6.1494e+02	3.2605e+02

Figura 3.21: Tensiones σ_{n+1} — Caso 3 — Plasticidad perfecta.

3.3.2. Endurecimiento Isótropo (plastifica PG1)

Las deformaciones y desplazamientos (no se muestran) coinciden con las vistas para el modelo de plasticidad perfecta como se observa en la Figura 3.22.

STRAIN <4x3 double>			
	1	2	3
1	6.0272e-05	1.1545e-03	1.7060e-03
2	6.2216e-05	1.1545e-03	7.5797e-04
3	6.0272e-05	2.0698e-04	1.7075e-03
4	6.2216e-05	2.0698e-04	7.6036e-04

Figura 3.22: Deformación total — Caso 3 — Endurecimiento isótropo.

Las deformaciones plásticas son menores si hay endurecimiento, como se observa al comparar las Figuras 3.23 y 3.20.

STRAINP <4x4 double>				
1	2	3	4	
1 -5.8123e-05	1.2704e-04	1.4509e-04	-6.8917e-05	
2 0	0	0	0	0
3 0	0	0	0	0
4 0	0	0	0	0

Figura 3.23: Deformación Plástica total — Caso 3 — Endurecimiento isótropo.

Las tensiones equivalentes del caso 3 con endurecimiento son mayores que sin endurecimiento debido a la pendiente $E_T \neq 0$.

SIGNMAS1 <4x4 double>				
1	2	3	4	
1 1.6670e+03	3.1343e+03	1.1498e+03	1.5813e+03	
2 1.5754e+03	3.3412e+03	6.1702e+02	1.4723e+03	
3 4.2675e+02	6.5727e+02	1.3803e+03	3.2370e+02	
4 4.2911e+02	6.5900e+02	6.1494e+02	3.2605e+02	

Figura 3.24: Tensiones σ_{n+1} — Caso 3 — Endurecimiento isótropo.

La tensión de fluencia para el PG1 aumentó, como era de esperarse. Ver fila 1 de la Figura 3.25.

SIGYNMAS1 <	
1	
1 1.6670e+03	
2 1.6667e+03	
3 1.6667e+03	
4 1.6667e+03	

Figura 3.25: Tensiones $\sigma_{Y(n+1)}$ — Caso 3 — Endurecimiento isótropo.

3.3.3. Error relativo entre TLF y TLF con Elasto-Plasticidad

Se calculará el error existente entre ambas formulaciones, tal como se hizo para el caso de carga anterior.

En la Figura 3.26 se presentan las tensiones σ_{n+1} de Von Mises. Se observa que las tensiones son iguales hasta el paso 9, donde se produce la fluencia del PG1. La tabla de la izquierda muestra las tensiones de la formulación TLF+EP, mientras que la derecha la TLF.

SIGEQ <20x1>		SIGEQ <10x1>	
	1		1
1	301.1945	1	301.1945
2	602.3488	2	602.3488
3	903.4630	3	903.4630
4	1.2045e+03	4	1.2045e+03
5	1.5056e+03	5	1.5056e+03
6	1.8066e+03	6	1.8066e+03
7	2.1075e+03	7	2.1075e+03
8	2.4084e+03	8	2.4084e+03
9	2.7093e+03	9	2.7093e+03
10	2.5002e+03	10	3.0101e+03
11	2.8010e+03		
12	2.5004e+03		

Figura 3.26: Tensiones de Von Mises para cada paso de carga — Caso de cargas 3 — PG1.

El error relativo entre las tensiones finales calculadas por las dos formulaciones se calculó como se indica en la sección 2.5, siendo mayor la tensión predicha por la TLF:

$$E_{rp \text{ caso3 PG1}} = 16,9 \%$$

Capítulo 4

Ejercicio 2: Aplicación de deformaciones

Para la aplicación de los dos casos de deformación se utilizaron 10 pasos, al igual que para la aplicación de las cargas. Para este ejercicio se evaluaron directamente los incrementos de desplazamiento para hallar las deformaciones, las tensiones y las fuerzas equivalentes a tensiones F . El algoritmo de retorno radial fue empleado en la misma forma que se empleó para la aplicación de cargas. La función que permite modelar este ejercicio es `MainTP3v5isoU.m`.

4.1. Caso 1 (no plastifica)

Para este caso de cargas no plastifica ningún punto de Gauss. En la Figura 4.1 se aprecian los desplazamientos de los nodos del elemento cuadrilateral. Nótese que las únicas deformaciones están en las direcciones (1,2) y (2,2). Todas las demás son cero.

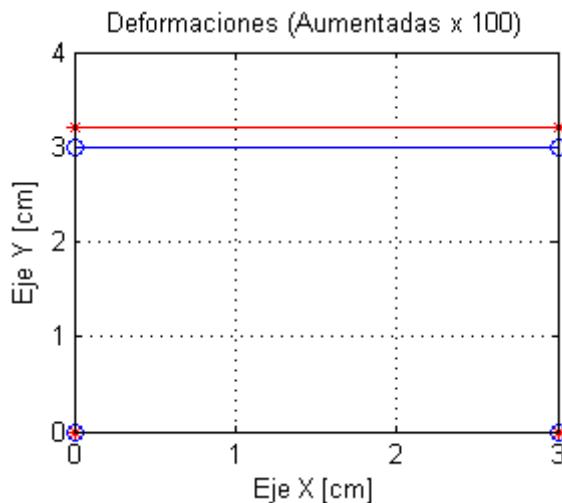


Figura 4.1: Deformación del elemento — Caso 1 — Plasticidad perfecta.

En la Figura 4.2 se aprecia la curva de carga y se nota como no alcanza la tensión de fluencia de 2500 kgf/cm^2 (asteriscos negros). Sólo se ilustra el punto de Gauss 1.

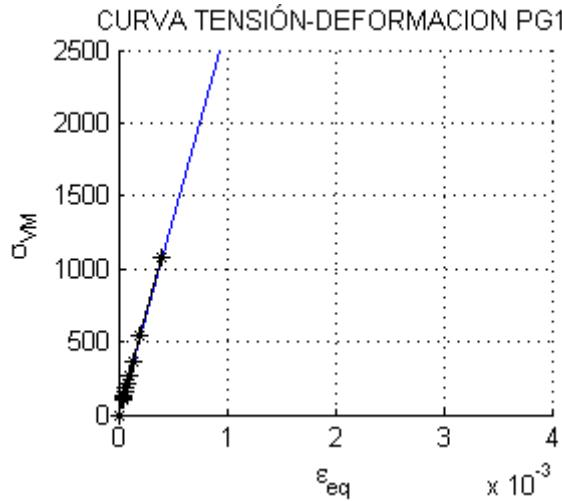


Figura 4.2: Curva σ_{VM} vs. $\bar{\varepsilon}$ — Caso 1 — Plasticidad perfecta.

En la Figura 4.3 se observan los desplazamientos ingresados al modelo.

DISPLACEMENT <4x3 double>			
	1	2	3
1	0	0.0020	0
2	0	0.0020	0
3	0	0	0
4	0	0	0

Figura 4.3: Desplazamiento — Caso 1.

Las deformaciones totales sólo se manifiestan en la dirección Y, como es de esperar, ya que sólo existen desplazamientos en esa dirección. El estado de deformación plana impone desplazamientos iguales a cero en la dirección 33. Esta deformación ε_{22} es igual en todos los puntos de Gauss y los estados de deformación de todos los PG son iguales.

STRAIN <4x3 double>			
	1	2	3
1	0	6.6689e-04	0
2	0	6.6689e-04	0
3	0	6.6689e-04	0
4	0	6.6689e-04	0

Figura 4.4: Deformación total — Caso 1.

Para este caso de deformaciones no existen componentes de corte σ_{12} y todos los estados de tensión son iguales. Ver Figura 4.5.

SIGNMAS1 <4x4 double>				
	1	2	3	4
1	8.0742e+02	1.8865e+03	0	8.0742e+02
2	8.0742e+02	1.8865e+03	0	8.0742e+02
3	8.0742e+02	1.8865e+03	0	8.0742e+02
4	8.0742e+02	1.8865e+03	0	8.0742e+02

Figura 4.5: Tensiones σ_{n+1} — Caso 1.

Las sumatoria de fuerzas equivalentes a tensiones para este caso de deformaciones $F_{(i,j)} = 0$, lo que indica que el elemento se mantiene en equilibrio. Las direcciones de las fuerzas son: nodo 1(+der,+arr), nodo 2(-izq,+arr), nodo 3(-izq,-aba), nodo 4(+der,-aba). Las sumatorias de fuerzas en X e Y también son iguales a cero.

ot_F <8x1 dou>	
	1
1	1.2119e+03
2	2.8298e+03
3	-1.2119e+03
4	2.8298e+03
5	-1.2119e+03
6	-2.8298e+03
7	1.2119e+03
8	-2.8298e+03

Figura 4.6: Fuerzas Equivalentes a tensiones — Caso 1.

4.2. Caso 2 (no plastifica)

Para este caso tampoco plastifica ningún punto de Gauss a pesar de que el desplazamiento en dirección “Y” fue duplicado. En la Figura 4.7 se aprecian los desplazamientos de los nodos 1 y 2 aumentados 100 veces.

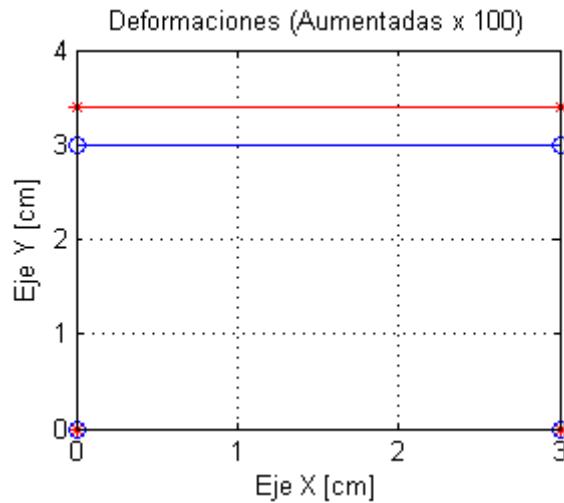
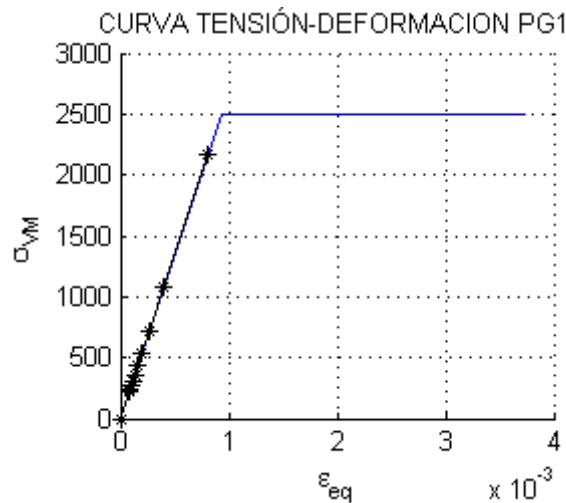


Figura 4.7: Deformación del elemento — Caso 2.

En la Figura 4.8 se observa la curva tensión-deformación para el PG1. Dado que todos los estados de tensión y deformación son iguales, esta gráfica representa los estados de todos los puntos. No se produce fluencia dado que ninguno alcanza los 2500 kgf/cm^2 .

Figura 4.8: Curva σ_{VM} vs. $\bar{\varepsilon}$ — Caso 2.

En la Figura 4.9 se encuentran los desplazamientos aplicados tras 10 pasos incrementales y en dirección (1,2) y (2,2).

DISPLACEMENT <4x3 double>			
	1	2	3
1	0	0.0040	0
2	0	0.0040	0
3	0	0	0
4	0	0	0

Figura 4.9: Desplazamientos — Caso 2.

De nuevo los estados de deformación son iguales y no existen componentes ε_{11} ni ε_{33} .

STRAIN <4x3 double>			
	1	2	3
1	0	1.3342e-03	0
2	0	1.3342e-03	0
3	0	1.3342e-03	0
4	0	1.3342e-03	0

Figura 4.10: Deformación total — Caso 2.

Los estados de tensión también son iguales y no existe componente σ_{12} . Ver Figura 4.11.

SIGNMAS1 <4x4 double>				
	1	2	3	4
1	1.6143e+03	3.7768e+03	0	1.6143e+03
2	1.6143e+03	3.7768e+03	0	1.6143e+03
3	1.6143e+03	3.7768e+03	0	1.6143e+03
4	1.6143e+03	3.7768e+03	0	1.6143e+03

Figura 4.11: Tensiones σ_{n+1} — Caso 2.

El equilibrio de fuerzas en X e Y se cumple también. El elemento se encuentra en estado de equilibrio de fuerzas. Ver Figura 4.12.

ot_F <8x1 dou	
1	2.4247e+03
2	5.6652e+03
3	-2.4247e+03
4	5.6652e+03
5	-2.4247e+03
6	-5.6652e+03
7	2.4247e+03
8	-5.6652e+03

Figura 4.12: Fuerzas Equivalentes a tensiones — Caso 2.

Capítulo 5

Código del Retorno Radial

El código fue desarrollado en Matlab. Las funciones que no se presentan aquí están anexadas digitalmente a este trabajo. El código desarrollado es un complemento del código desarrollado para el Trabajo práctico 2. La función principal para ejecutar es `MainTP3v5iso.m`, mientras que la función que corre la aplicación de las deformaciones es `MainTP3v5isoU`.

```
1 %-----  
2 %      INICIO DE ALGORITMO DE RETORNO RADIAL  
3 %-----  
4  
5 SIGTRIAL=SIGN+DELSTRESS3; % Sigma trial.  
6  
7 %-----  
8 %      GRAFICO 2D - EPSEQ Y SIGEQ  
9 %-----  
10 EPSVOL=(1/3)*(STRAIN(GRAFSS,1)+STRAIN(GRAFSS,2)); % Epsilon volum.  
11 DEVSTRAIN=[STRAIN(GRAFSS,1)-EPSVOL,... % Deviatoric strain.  
12     STRAIN(GRAFSS,2)-EPSVOL,...  
13     STRAIN(GRAFSS,3)];  
14 pasoSS=pasoSS+1;  
15 EPSEQ(pasoSS)=sqrt((2/3)*(DEVSTRAIN(1)^2+DEVSTRAIN(2)^2+...  
16     2*DEVSTRAIN(3)^2)); % Epsilon equivalente.  
17 [STRESSAUX,THETAUX]=TENPPALES(SIGTRIAL(GRAFSS,:)); % Tensiones  
18 %principales del PG1  
19 [SIGEQ(pasoSS)]=VonMisesPPALES(STRESSAUX); % Von Mises a partir  
20 %de tensiones principales.  
21 CONT=CONT+1;  
22  
23 %-----  
24 %      RETORNO RADIAL PARA CADA PUNTO DE GAUSS  
25 %-----  
26  
27 % Puntos de 2 4  
28 % Gauss (g) 1 3  
29  
30 for g=1:4 % Para PG1 hasta PG4  
31 %-----  
32 %      ELASTOPLASTICIDAD | ENDURECIMIENTO ISOTROPICO  
33 %-----  
34 P(g)=(1/3)*(SIGTRIAL(g,1)+SIGTRIAL(g,2)+SIGTRIAL(g,4));  
35 STRIAL(g,:)=[SIGTRIAL(g,1)-P(g),SIGTRIAL(g,2)-P(g),...
```

```

36     SIGTRIAL(g,3),SIGTRIAL(g,4)-P(g)]; % S_trial desviadoras.
37 NORMS(g)=sqrt(STRIAL(g,1)^2+STRIAL(g,2)^2+STRIAL(g,4)^2+...
38 2*STRIAL(g,3)^2); % Norma de tensor desviador S.
39
40 %-----%
41 % GRAFICOS STRESS Y STRIAL
42 %-----%
43 [STRESSPPG(g,:),THETAPPG]=TENPPALES(SIGTRIAL(g,:)); % Tensiones
44 %principales del PG1
45 [STRIALA(g,:),THETASTRA]=TENPPALES(STRIAL(g,:)); % S ppales.
46 grafico(STRESSPPG(GRAF,:)) % Con Presin.
47 grafico(STRIALA(GRAF,:)) % Sin presin.
48
49 %-----%
50 % ALGORITMO PREDICTOR-CORRECTOR
51 %-----%
52 if NORMS(g)<=KAPPAN(g)
53     SIGNMAS1(g,:)=SIGTRIAL(g,:); % Sigma_{n+1}
54     STRAINE(g,1:3)=STRAINE(g,1:3)+DELSTRAIN(g,1:3); % Elastic.
55     STRAINP(g,:)=STRAINP(g,:)+[0,0,0,0]; % Plastico.
56 elseif NORMS(g)>KAPPAN(g)
57     NNMAS1(g,:)=STRIAL(g,:)/NORMS(g); % n_{n+1}. DIRECCION
58     %UNITARIA p37 Borja.
59     DELAMBDA(g)=(NORMS(g)-KAPPAN(g))/(2*G+H); % Delta Lambda.
60     SIGNMAS1(g,:)=SIGTRIAL(g,:)-2*G*DELAMBDA(g)*NNMAS1(g,:);
61     % Sigma_{n+1}
62     KAPPAN(g)=KAPPAN(g)+H*DELAMBDA(g); % Radio+DeltaRadio.
63
64 %-----%
65 % STRAINS
66 %-----%
67 DELSTRAINP(g,:)=DELAMBDA(g)*NNMAS1(g,:); %Deltas plastico.
68 DELSTRAINE(g,:)=DELSTRAIN(g,:)-DELSTRAINP(g,:); %Delta el.
69 STRAINE(g,:)=STRAINE(g,:)+DELSTRAINE(g,:);
70 STRAINP(g,:)=STRAINP(g,:)+DELSTRAINP(g,:);
71
72 %-----%
73 % SATISFACE STRAINP1+STRAINP2+STRAINP3=0
74 %-----%
75 %-----%
76 SNMAS1(g,:)=[SIGNMAS1(g,1)-P(g),SIGNMAS1(g,2)-P(g),...
77 SIGNMAS1(g,3),SIGNMAS1(g,4)-P(g)];
78 [SNMAS1A(g,:),THETASNM1A]=TENPPALES(SNMAS1(g,:)); %PPALES.
79 [SIGNMAS1A(g,:),THETASIGNM1A]=TENPPALES(SIGNMAS1(g,:)); %PPAL.
80 [NNMAS1A(g,:),THETANNM1A]=TENPPALES(NNMAS1(g,:)); %PPALES.
81 grafico(SNMAS1A(GRAF,:))
82 grafico(SIGNMAS1A(GRAF,:))
83 quiver3(P(GRAF),P(GRAF),P(GRAF),NNMAS1A(GRAF,1)*FAC, ...
84 NNMAS1A(GRAF,2)*FAC,NNMAS1A(GRAF,3)*FAC) % Grafico de
85 %la direccion de n_{n+1}
86
87 %-----%
88 % REVISAR SI LOS ANGULOS PPALES CORRESP PARA OTROS PG
89 %-----%
90 if GRAFSS==g % Para grafico Stress-Strain EQ.
91     pasoSS=pasoSS+1;
92     EPSEQ(pasoSS)=EPSEQ(pasoSS-1);
93     [SIGEQ(pasoSS)]=VonMisesPPALES(SIGNMAS1A(GRAFSS,:));
94     % Von Mises a partir de tensiones principales.

```

```
94         CONT=CONT+1;
95     end
96 end
97
98 TOTSTRAIN(g,:)=STRAINE(g,:)+STRAINP(g,:);
99 end
100
101 SIGN = SIGNMAS1; % Sigma_n = Sigma_{n+1}
```

Capítulo 6

Comentarios y Conclusiones

- Se implementó un código de Matlab que realizar un retorno radial sobre las componentes del tensor de tensiones de Cauchy, corrigiéndolas y llevándolas a la superficie de fluencia, siempre y cuando ésta se presente. Esto permite realizar una mejor estimación de las tensiones teniendo en cuenta la teoría de fluencia J_2 o de Von Mises.
- Se trabajaron tres configuraciones de carga distintas y dos configuraciones donde se aplican desplazamientos en lugar de fuerzas. Para todas las configuraciones se estimó el comportamiento con un modelo de plasticidad perfecta y con uno de endurecimiento isótropo (por deformación plástica). Sólo se analizaron aquellos casos donde el material en el punto de Gauss correspondiente, entró en fluencia.
- Los desplazamientos, deformaciones y tensiones permanecen iguales a los calculados por la TLF en el TP2 mientras no haya fluencia. Si hay fluencia sólo se actualizan las tensiones, pero los desplazamientos y deformaciones permanecen iguales.
- Cuando asumimos plasticidad perfecta todos los retornos radiales de las tensiones llegan a un estado donde la tensión es la misma tensión de fluencia, mientras que si asumimos endurecimiento isótropo las tensiones calculadas por el algoritmo se ubicarán sobre la curva de endurecimiento.
- Las tensiones de prueba (trial) se alcanzan con la relación constitutiva constante, por lo tanto el incremento de tensión y deformación viaja paralelo a la curva con módulo E.
- Para estimar correctamente las tensiones de Cauchy es necesario transformar las tensiones desde el Segundo Tensor de Tensiones de Piola-Kirchhoff hacia el tensor de tensiones de Cauchy. Si esto no se realiza los cálculos tendrán un error que aumentará mientras mayores sean los desplazamientos.
- Para calcular el incremento de tensiones $\Delta\sigma$ durante el algoritmo de retorno radial también es necesario realizar la misma transformación debido a que las deformaciones empleadas son las deformaciones de Green-Lagrange, que multiplicadas por la relación constitutiva dará como resultado tensiones del Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff.

Bibliografía

- [1] GERE, J. M., AND GOODNO, B. J. *Mechanics of Materials*, 7 ed. Cengage Learning, 2009.
- [2] UGURAL, A. C., AND FENSTER, S. K. *Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity.*, 4 ed. Prentice-Hall, p. 36, 2003.