GEOMETRÍA EUCLIDIANA
EJERCICIO RESUELTO - CIRCUNFERENCIA
Docente: Fredy Mercado
Versión 1: 18 de abril de 2015

En una circunferencia se $C(O, r)$ se traza un diámetro $\overline{AB}$ y un radio $\overline{OC}$ perpendicular a $\overline{AB}$. Se prolonga $\overline{AB}$ a cada lado y en el exterior de $C(O, r)$ en longitudes iguales $AE = BD$. Se trazan $\overline{CE}$ y $\overline{CD}$, que corta a $C(O, r)$ en F y G. Probar que $m(O\hat{F}C) = m(O\hat{G}C)$.

Hipótesis:
$C(O, r)$.
$\overline{AB}$: cuerda diametral.
$\overline{OC}$ radio.
$\overline{OC} \perp \overline{AB}$.
$O - A - E$ y $C - G - D$ con $AE = BD$ (exteriores).
$C - F - E$, $C - G - D$.
$F \wedge G \in C(O, r)$.

Tesis:
$m(O\hat{F}C) = \alpha = \beta = m(O\hat{G}C)$.

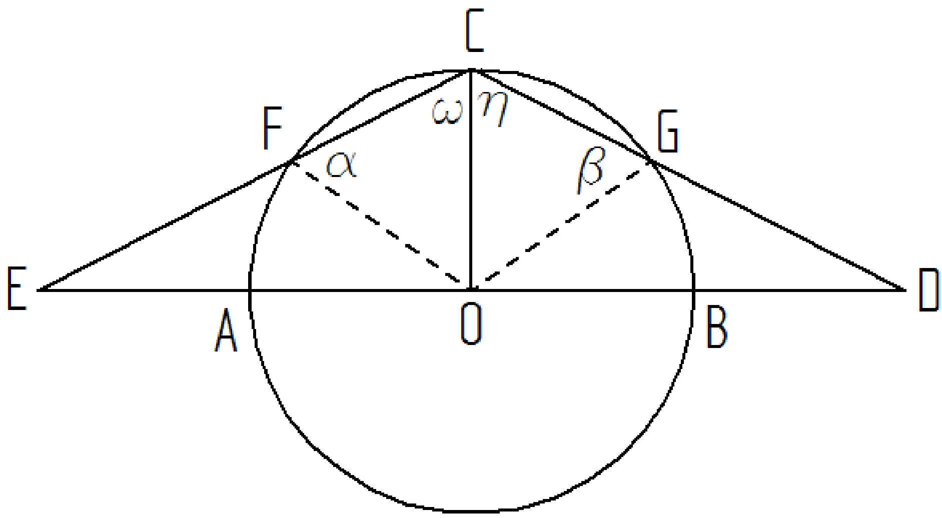

Figura 1:

DEMOSTRACIÓN

Proposición	**Razón**
1. Trazo $\overline{OF}$ y $\overline{OG}$	Por construcción.
2. $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ $(OA = OB)$	Por $\overline{AB}$ cuerda diametral, por Hipótesis y definición de congruencia de segmentos.
3. $\overline{AE} \cong \overline{BD}$ $(AE = BD)$	Por Hipótesis y definición de congruencia de segmentos.
4. $\overline{OC} \cong \overline{OC}$	Por propiedad reflexiva.
5. $OE = OA + AE$ $OD = OB + BD$	Por suma de segmentos.
6. $OE = OB + BD$	Por sustitución de 2 y 3 en 5.
7. $OE = OD$	Por transitividad entre 5b y 6.
8. $\overline{OC} \cong \overline{OC}$	Por propiedad reflexiva.
9. $m(E\hat{O}C) = m(D\hat{O}C) = 90^o$	Por hipótesis. $\overline{OC} \perp \overline{AB}$.
10. $\triangle EOC \cong \triangle DOC$	Por criterio LAL. De 7, 8 y 9.
11. $\overline{OF} \cong \overline{OC} \cong \overline{OG}$	Por ser segmentos radiales.
12. $\triangle FOC$ y $\triangle COG$ isósceles.	Por 11 y definición de triángulo isósceles.
13. $\alpha = \omega$ y $\beta = \eta$	Por propiedad de triángulo isósceles. De 12.
14. $\omega = \eta$	Por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes. De 10.
15. $\alpha = \beta$	Por transitividad en 13 y 14. l.q.q.d.

GEOMETRÍA EUCLIDIANA
EJERCICIO RESUELTO - CIRCUNFERENCIA
Docente: Fredy Mercado
Versión 1: 18 de abril de 2015

Dos circunferencias $C(O, r)$ y $C(O', r')$ son secantes en A y B. Por A se trazan los diámetros $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$. Demostrar que C, B y D están alineados.

Hipótesis:
$C(O, r) \cap C(O', r') = \{A, B\}$ (circunferencias secantes).
$\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ diámetros.

Tesis:
$C - B - D$ (alineados).

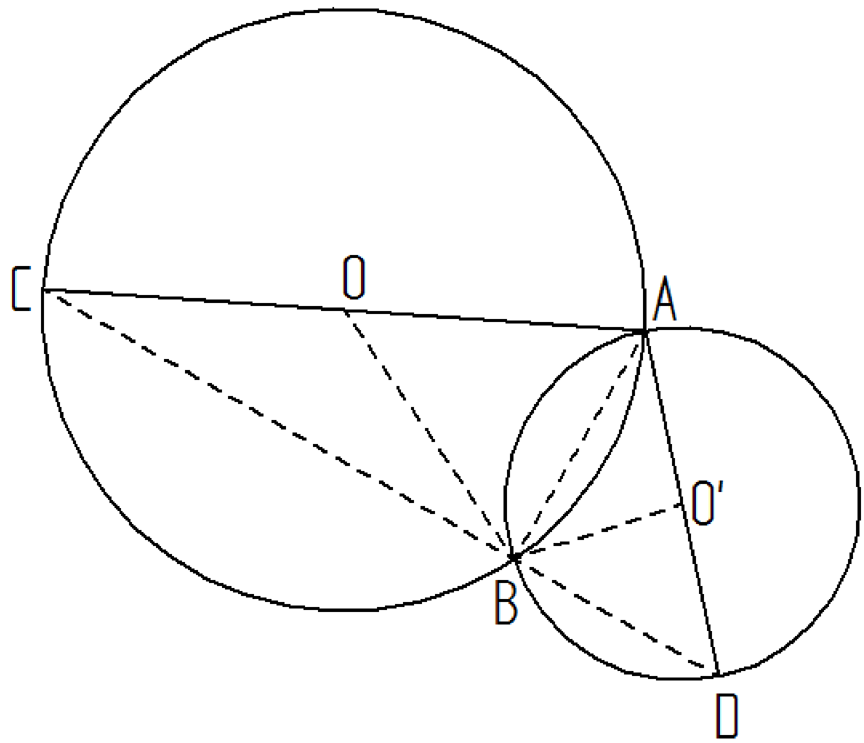

Figura 2:

DEMOSTRACIÓN

Proposición	**Razón**
1. Trazo $\overline{OB}$, $\overline{O'B}$, $\overline{CB}$ y $\overline{BD}$.	Por construcción.
2. $\overline{OA} \cong \overline{OC} \cong \overline{OB}$ y $\overline{O'A} \cong \overline{O'B} \cong \overline{O'D}$	Por ser segmentos radiales (Teorema: en una circunferencia todos los radios son congruentes).
3. $OA = OC = OB$ y $O'A = O'B = O'D$	Por definición de segmentos congruentes. De 2.
4. $AC = AO + OC$ y $AD = AO' + O'D$	Por suma de segmentos.
5. $AC = OB + OB$ y $AD = O'B + O'B$	Por sustitución de 3 en 4.
6. $AC = 2OB$ y $AD = 2O'B$	Por propiedad de los reales. De 5.
7. $\triangle ACB$ y $\triangle ADB$ rectángulos en B.	Por Teorema (mediana relativa a la hipotenusa): si en un triángulo un lado es el doble de su respectiva mediana, entonces el triángulo es rectángulo.
8. $m(A\hat{B}C) = m(A\hat{B}D) = 90^o$	Por definición de triángulo rectángulo. De 7.
9. $m(C\hat{B}D) = m(A\hat{B}C) + m(A\hat{B}D)$	Por suma de ángulos.
10. $m(C\hat{B}D) = 180^o$	Por sustitución de 8 en 9 y propiedad de los reales.
11. C-B-D (colineales)	Por teorema: si dos ángulos adyacentes $A\hat{B}C$ y $C\hat{B}D$ son suplementarios entonces forman un par lineal y por lo tanto los puntos A, B y D son colineales. l.q.q.d.