GEOMETRÍA EUCLIDIANA

RESUMEN DEL TEMA

PROPORCIONALIDAD, SEMEJANZA Y RELACIONES MÉTRICAS

FREDY ANDRÉS MERCADO NAVARRO

VERSIÓN 1: 21 DE ABRIL DE 2020

thefinitelement.com

RAZONES Y PROPORCIONES

DEFINICIONES

D1. RAZÓN: La razón entre dos números reales **a** y **b**, (**b≠0**), es el cociente entre **a** y **b**, es decir $\frac{a}{b}$.

También se escribe: **a/b**, **a÷b** o **a:b**.

Al numerador se le llama **antecedente** y al denominador **consecuente**.

D2. PROPORCIÓN: Es la igualdad entre dos razones: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Se lee: "**a** es a **b**" como "**c** es a **d**".

También se escribe: **a/b=c/d, a:b=c:d**.

a y **d** son los **extremos; b** y **c** son los **medios**.

D3. CUARTA PROPORCIONAL: Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$, es decir **a:b=c:x** entonces "**x** es la **cuarta** proporcional entre **a**, **b** y **c**", en ese orden.

D4. MEDIA PROPORCIONAL: Si $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$, es decir **a:x=x:b** entonces "**x** es la **media proporcional** entre **a** y **b**". También se llama **media geométrica.**

D5. TERCEROS PROPORCIONALES: Si "**x** es la **media proporcional** entre **a** y **b**". Entonces "**a** y **b**" son las **terceras proporcionales** de **x**.

D6. RAZÓN ENTRE DOS SEGMENTOS: La razón entre dos segmentos es la razón entre sus medidas, en la misma unidad de medida.

D7. SEGMENTOS PROPORCIONALES: Dos segmentos son proporcionales a otros dos si la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos segundos.

PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

Siempre que las razones resulten definidas:

1. Sumar (restar) a cada antecedente su respectivo consecuente

   Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$

2. Sumar (restar) a cada consecuente su respectivo antecedente

   Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $\frac{a}{b\pm a}=\frac{c}{d\pm c}$

3. Razones entre la suma y la diferencia del antecedente y el respectivo consecuente

   Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

4. La suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como cada antecedente es a su consecuente,

   Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

Esta propiedad es aplicable a cualquier serie de dos o más razones iguales, es decir:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$$

T1. TEOREMA FUNDAMENTAL DE SEGMENTOS PROPORCIONALES (TFSP): Toda recta paralela a un lado de un triángulo determina sobre los otros dos lados segmentos proporcionales.

T2. TEOREMA DE TALES 1: si tres o más rectas paralelas son intersecadas por dos rectas transversales entonces los segmentos de las transversales correspondientes determinados por las paralelas son proporcionales.

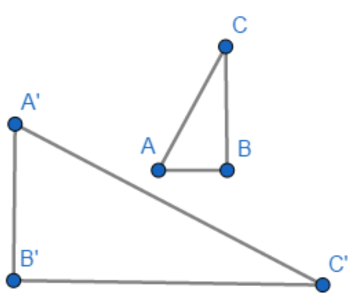
T3. TEOREMA (6º criterio de paralelismo y recíproco del TFSP): si en un triángulo una recta determina segmentos proporcionales sobre dos lados (o sobre sus prolongaciones) entonces dicha recta es paralela al tercer lado.

T4. TEOREMA RECTAS CONCURRENTES: si tres rectas concurrentes son transversales a dos rectas paralelas entonces sobre las paralelas se determinan segmentos proporcionales y recíprocamente.

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

D8. DEFINICIÓN: Dos triángulos ΔABC y ΔA'B'C' son semejantes si sus tres ángulos son respectivamente congruentes y sus tres lados son respectivamente proporcionales. Se denota ΔABC ~ Δ A'B'C':

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1.\left\{ \begin{array}{l} \angle A \cong \angle A' \\ \angle B \cong \angle B' \\ \angle C \cong \angle C' \end{array} \right\} \\ 2.\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'} = k \end{array} \right\}$$



Los ángulos respectivamente congruentes, y los lados respectivamente proporcionales se llaman elementos **homólogos** (en semejanza).

El número **k** es la razón de semejanza del ΔABC con respecto al Δ A'B'C' y significa que la medida de un lado del ΔABC es **k** veces la de su lado homólogo en el ΔA'B'C'. Dos triángulos congruentes son semejantes y su razón de semejanza es **k=1**.

CRITERIOS DE SEMEJANZA

T5. TEOREMA DE TALES 2: toda recta que corta a dos lados de un triángulo (o a sus prolongaciones), y es paralela al tercer lado, determina un segundo triángulo que es semejante al primero.

T6. TEOREMA SLAL: Si dos triángulos tienen un ángulo congruente formado por lados proporcionales entonces son semejantes.

T7. TEOREMA SAA: si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente congruentes entonces son semejantes.

T8. TEOREMA SLLL: si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente proporcionales entonces son semejantes.

T9. TEOREMA SRHC: si dos triángulos rectángulos tienen proporcionales las hipotenusas y uno de sus catetos entonces son semejantes.

T10. TEOREMA LÍNEAS NOTABLES: si dos triángulos son semejantes entonces la razón entre dos elementos rectilíneos homólogos (bisectrices, alturas, medianas, mediatrices) es igual a la razón de semejanza entre los triángulos.

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

D8. PROYECCIÓN DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA: la proyección ortogonal de un punto **P** sobre una recta **L** es el punto **P'** de intersección entre la recta **L** y la recta perpendicular a **L** que pasa por **P**. Es decir, **P'** es el pie de dicha perpendicular.

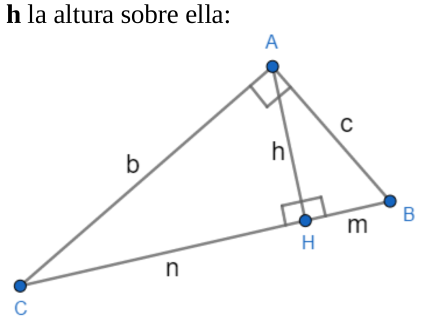
D9. PROYECCIÓN DE UN SEGMENTO SOBRE UNA RECTA: La proyección ortogonal de un segmento **AB** sobre una recta **L** es el segmento **A'B'** formado por los puntos proyecciones ortogonales de todos los puntos del segmento **AB** sobre la recta **L**.

NOTA: En adelante nos referiremos a una proyección ortogonal simplemente como proyección.

RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

T11. TEOREMA ARH: en todo triángulo **rectángulo** la altura relativa a la hipotenusa determina dos triángulos rectángulos semejantes a él.

En un ΔABC **rectángulo** en A, sean **m** y **n** las proyecciones de los catetos **c** y **b** sobre la hipotenusa **a** y sea **h** la altura sobre ella:



CATETO MEDIA PROPORCIONAL

T12. TEOREMA: cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella:

$$b^2 = a \cdot n$$
$$c^2 = a \cdot m$$

T13. TEOREMA DE PITÁGORAS: el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

T14. TEOREMA ALTURA MEDIA PROPORCIONAL: la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa:

$$h^2 = m \cdot n.$$

T15. TEOREMA ALTURA CUARTA PROPORCIONAL: la altura relativa a la hipotenusa es cuarta proporcional entre la hipotenusa y los catetos:

$$a \cdot h = b \cdot c.$$

BIBLIOGRAFÍA

Este resumen tuvo en cuenta teoría leída de los siguientes textos:

- VARGAS, Carlos. Notas de clase de Geometría Euclidiana. Editorial no definida. Institución no definida. Fecha no definida.

- LONDOÑO SANTAMARÍA, José Rodolfo. Geometría Euclidiana. Tercera edición, mayo de 2007. Editorial Universidad de Antioquia. Impreso en Medellín, Colombia.

- ROJAS CORTÉS, Lucio. Matemáticas básicas con aplicaciones a la ingeniería / Lucio Rojas Cortés, Arturo Ramírez Baracaldo y Luis Enrique Rojas Cárdenas. 1ª ed. Bogotá: Ecoe Ediciones, 2016. 492 p.