INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

TRABAJO PRÁCTICO 2 (CORREGIDO)

FUNCIONES DE FORMA

Estudiante

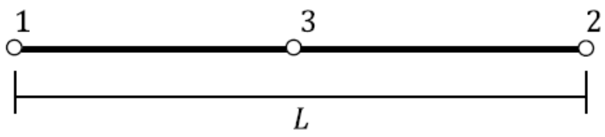
FREDY ANDRÉS MERCADO NAVARRO
Pasaporte: 98´773.532
Maestría en Simulación Numérica y Control

Cuatrimestre: II-2011
07 de Marzo de 2012

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires
Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Argentina

PROBLEMA 1



Parte a)

En este problema se demostrará que existe una zona de exclusión para el nodo del medio. Primero planteamos las coordenadas dentro del elemento como:

$$x(r) = \sum_{i=1}^{3} h_i(r)x_i = h_1(r)\hat{x}_1 + h_2(r)\hat{x}_2 + h_3(r)\hat{x}_3$$

Determinamos la expresión para el operador Jacobiano como:

$$\frac{\partial x(r)}{\partial r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial h_i(r)}{\partial r}\hat{x}_i = \frac{\partial h_1(r)}{\partial r}\hat{x}_1 + \frac{\partial h_2(r)}{\partial r}\hat{x}_2 + \frac{\partial h_3(r)}{\partial r}\hat{x}_3$$

$$h_1 = \frac{1}{2}(1-r) - \frac{1}{2}(1-r^2)$$

$$h_2 = \frac{1}{2}(1+r) - \frac{1}{2}(1-r^2)$$

$$h_3 = (1-r^2)$$

$$h_1 = \frac{r}{2}(-1+r), \qquad h_2 = \frac{r}{2}(1+r), \qquad h_3 = (1-r^2)$$

$$\frac{\partial h_1(r)}{\partial r} = r - \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial h_2(r)}{\partial r} = r + \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial h_3(r)}{\partial r} = -2r$$

$$\frac{\partial x(r)}{\partial r} = \left(r - \frac{1}{2}\right)\hat{x}_1 + \left(r + \frac{1}{2}\right)\hat{x}_2 + (-2r)\hat{x}_3$$

Para efectos de nuestro problema específico:

$$\hat{x}_1 = 0, \qquad \hat{x}_2 = L, \qquad \hat{x}_3 = \hat{x}_3$$

La expresión $\partial x(r)/\partial r$ representa al operador Jacobiano de la transformación de coordenadas naturales a cartesianas. Se desea mostrar valores de r para los cuales la ubicación de $\hat{x}_3$ no es válida como herramienta para el análisis por elementos finitos. Iniciamos igualando la pendiente a cero:

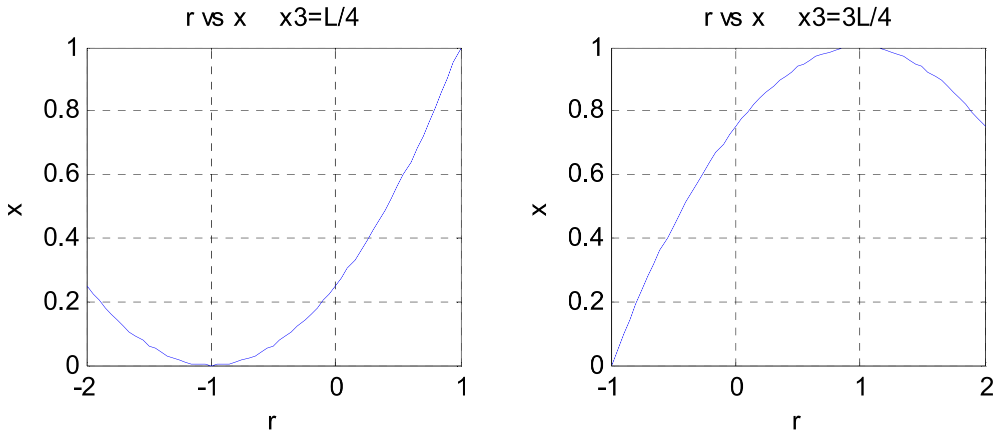
$$\frac{\partial x(r)}{\partial r} = 0 = \left(r + \frac{1}{2}\right)L + (-2r)\hat{x}_3$$

$$\hat{x}_3 = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{2r}\right)$$

Dado que las integrales serán desarrolladas en el intervalo $-1 \leq r \leq 1$, evaluamos $\hat{x}_3$ en los dos extremos:

$$\hat{x}_3(r=-1)=\frac{L}{4}, \qquad \hat{x}_3(r=1)=\frac{3L}{4}$$

Podemos concluir, que estos dos valores son los límites de la ubicación de $\hat{x}_3$. Cualquier valor por debajo de L/4 implicaría que para un X dado existen dos valores de r, y de igual manera para cualquier valor sobre 3L/4. Esto se comprende mucho más claramente observando las figuras siguientes:



Parte b) (CORREGIDO)

Se determinará qué sucede en el campo de las deformaciones cuando $x_3 = x1 + L/4$ o $x_3 = x_2 - L/4$. Para hallar la respuesta se planteará la expresión para el vector de deformaciones, entendiéndose éste, en forma matemática, como la derivada del desplazamiento con respecto a la coordenada espacial x (para 1D).

El campo de deformaciones está dado por:

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial r}u_1 + \frac{\partial h_2}{\partial r}u_2 + \frac{\partial h_3}{\partial r}u_3\right)J^{-1}$$

Nuestro objetivo ahora es desarrollar la expresión anterior y luego reemplazar para hallar qué sucede con $\partial u/\partial x$ cuando $x_3 = x_1 + L/4$.

$$J = \frac{\partial x}{\partial r} = \left(r - \frac{1}{2}\right)\hat{x}_1 + \left(r + \frac{1}{2}\right)\hat{x}_2 + (-2r)\hat{x}_3$$

Para $x_3 = x_1 + L/4$:

$$J = \frac{\partial x}{\partial r} = \left(r - \frac{1}{2}\right)\hat{x}_1 + \left(r + \frac{1}{2}\right)\hat{x}_2 + (-2r)\left(x_1 + \frac{L}{4}\right)$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial r} = \left(r - \frac{1}{2}\right)\hat{x}_1 + \left(r + \frac{1}{2}\right)(x_1 + L) + (-2r)\left(x_1 + \frac{L}{4}\right)$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial r} = r\hat{x}_1 - \frac{1}{2}\hat{x}_1 + rx_1 + rL + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}L - 2rx_1 - 2r\frac{L}{4}$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{2}L(r+1)$$

$$J^{-1} = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2}{L(r+1)}$$

Retomando la expresión para las deformaciones tenemos:

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial r}u_1 + \frac{\partial h_2}{\partial r}u_2 + \frac{\partial h_3}{\partial r}u_3\right)J^{-1}$$

$$\epsilon = \left(\left(r - \frac{1}{2}\right)u_1 + \left(r + \frac{1}{2}\right)u_2 + (-2r)u_3\right)\frac{2}{L(r+1)}$$

De la expresión anterior es posible observar con claridad que el vector de deformaciones se hace infinito en $r = -1$ para $x_3 = x_1 + L/4$.

Para $x_3 = x_2 - L/4$:

$$J = \frac{\partial x}{\partial r} = \left(r - \frac{1}{2}\right)\hat{x}_1 + \left(r + \frac{1}{2}\right)\hat{x}_2 + (-2r)\left(x_2 - \frac{L}{4}\right)$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial r} = \left(r - \frac{1}{2}\right)\hat{x}_1 + \left(r + \frac{1}{2}\right)(x_1 + L) + (-2r)\left((x_1 + L) - \frac{L}{4}\right)$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial r} = \left(r - \frac{1}{2}\right)\hat{x}_1 + \left(r + \frac{1}{2}\right)(x_1 + L) + (-2r)\left(x_1 + \frac{3}{4}L\right)$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial r} = r\hat{x}_1 - \frac{1}{2}\hat{x}_1 + rx_1 + rL + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}L - 2rx_1 - rL\frac{3}{2}$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial r} = rL + \frac{1}{2}L - rL\frac{3}{2}$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{2}L - \frac{1}{2}rL$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{2}L(1-r)$$

$$J^{-1} = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2}{L(1-r)}$$

Retomando la expresión para las deformaciones tenemos:

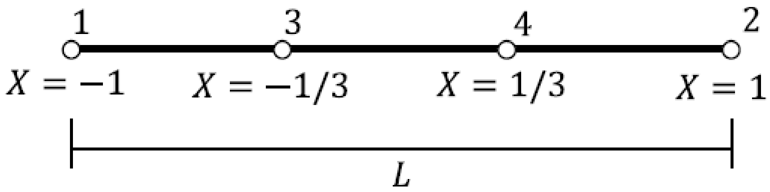
$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial r}u_1 + \frac{\partial h_2}{\partial r}u_2 + \frac{\partial h_3}{\partial r}u_3\right)J^{-1}$$

$$\epsilon = \left(\left(r - \frac{1}{2}\right)u_1 + \left(r + \frac{1}{2}\right)u_2 + (-2r)u_3\right)\frac{2}{L(1-r)}$$

De la expresión anterior también es posible observar con claridad que el vector de deformaciones se hace infinito en $r = 1$ para $x_3 = x_2 - L/4$.

PROBLEMA 2

En este problema se determinarán las funciones de forma del siguiente elemento utilizando polinomios de Lagrange.



Para hallar las funciones de forma definimos primero a las funciones de forma como:

$$h_i(r) = F_{i,0}l_0(r) + F_{i,1}l_1(r) + F_{i,2}l_2(r) + F_{i,3}l_3(r), \qquad i = 1 \dots 4\ nodos.$$

$$l_j(r) = \frac{(r-r_0)(r-r_1)\dots(r-r_{j-1})(r-r_{j+1})\dots(r-r_n)}{(r_j-r_0)(r_j-r_1)\dots(r_j-r_{j-1})(r_j-r_{j+1})\dots(r_j-r_n)}, \qquad j = 0 \dots 3.$$

$$l_j(r_i) = \delta_{ij}, \qquad Kronecker\ delta, \qquad \delta_{ij} = 1\ si\ i = j, \qquad \delta_{ij} = 0\ si\ i \neq j$$

Dado que poseemos cuatro nodos, nuestro polinomio será de grado 3:

$$l_0(r) = \frac{(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)}{(r_0-r_1)(r_0-r_2)(r_0-r_3)}, \qquad l_1(r) = \frac{(r-r_0)(r-r_2)(r-r_3)}{(r_1-r_0)(r_1-r_2)(r_1-r_3)}$$

$$l_2(r) = \frac{(r-r_0)(r-r_1)(r-r_3)}{(r_2-r_0)(r_2-r_1)(r_2-r_3)}, \qquad l_3(r) = \frac{(r-r_0)(r-r_1)(r-r_2)}{(r_3-r_0)(r_3-r_1)(r_3-r_2)}$$

Se cumplirá para todos los puntos:

$$r_0 = -1, \qquad r_1 = -\frac{1}{3}, \qquad r_2 = \frac{1}{3}, \qquad r_3 = 1$$

- **Para hallar** h_1

$$h_1(r) = F_0 l_0(r)$$

Nótese que la expresión anterior resulta de cumplir con la condición $h_1 = 1$ en $r = -1$, y cero en los demás puntos.

$$F_0 = F(r=-1) = 1, \qquad F_1 = F(r=-1/3) = 0$$

$$F_2 = F(r=1/3) = 0, \qquad F_3 = F(r=1) = 0$$

$$l_0(r) = \frac{(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)}{(r_0-r_1)(r_0-r_2)(r_0-r_3)} = \frac{\left(r-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\left(r-\frac{1}{3}\right)(r-1)}{\left(-1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\left(-1-\frac{1}{3}\right)(-1-1)}$$

$$l_0(r)=\frac{\left(r+\frac{1}{3}\right)\left(r-\frac{1}{3}\right)(r-1)}{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)(-2)}=-\frac{1}{16}(9r^3-9r^2-r+1)$$

De este modo, se concluye que:

$$h_1(r)=-\frac{1}{16}(9r^3-9r^2-r+1)$$

- **Para hallar** h_2

$$h_2(r)=F_1l_1(r)$$

$$F_1=F(r=-1/3)=1,\qquad F_{0,2,3}=0$$

$$l_1(r)=\frac{(r-r_0)(r-r_2)(r-r_3)}{(r_1-r_0)(r_1-r_2)(r_1-r_3)}=\frac{\left(r-(-1)\right)\left(r-\frac{1}{3}\right)(r-1)}{\left(-\frac{1}{3}-(-1)\right)\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)}$$

$$l_0(r)=\frac{(r+1)\left(r-\frac{1}{3}\right)(r-1)}{\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}=\frac{1}{16}(27r^3-9r^2-27r+9)$$

De este modo, se concluye que:

$$h_2(r)=\frac{1}{16}(27r^3-9r^2-27r+9)$$

- **Para hallar** h_3

$$h_3(r)=F_2l_2(r)$$

$$F_2=F(r=1/3)=1,\qquad F_{0,1,3}=0$$

$$l_2(r)=\frac{(r-r_0)(r-r_1)(r-r_3)}{(r_2-r_0)(r_2-r_1)(r_2-r_3)}=\frac{\left(r-(-1)\right)\left(r-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)(r-1)}{\left(\frac{1}{3}-(-1)\right)\left(\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)}$$

$$l_0(r)=\frac{(r+1)\left(r+\frac{1}{3}\right)(r-1)}{\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)}=-\frac{1}{16}(27r^3+9r^2-27r-9)$$

De este modo, se concluye que:

$$h_3(r)=-\frac{1}{16}(27r^3+9r^2-27r-9)$$

- **Para hallar** h_4

$$h_4(r) = F_3 l_3(r)$$

$$F_3 = F(r=1) = 1, \qquad F_{0,2,3} = 0$$

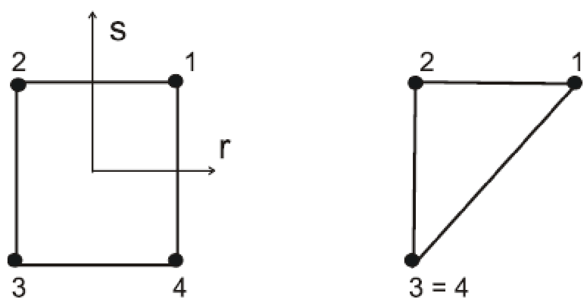
$$l_3(r) = \frac{(r-r_0)(r-r_1)(r-r_2)}{(r_3-r_0)(r_3-r_1)(r_3-r_2)} = \frac{(r-(-1))\left(r-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\left(r-\frac{1}{3}\right)}{(1-(-1))\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)}$$

$$l_0(r) = \frac{(r+1)\left(r+\frac{1}{3}\right)\left(r-\frac{1}{3}\right)}{(2)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{16}(9r^3+9r^2-r-1)$$

De este modo, se concluye que:

$$h_4(r) = \frac{1}{16}(9r^3+9r^2-r-1)$$

PROBLEMA 3



A continuación se realizará el procedimiento para colapsar dos nodos en un elemento cuadrangular, para formar un nuevo elemento de forma triangular. Las funciones de forma para el elemento de cuatro nodos son:

$$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

$$h_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$

$$h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

A continuación se suman las funciones de forma de los nodos 3 y 4 para dar origen a una nueva función de forma correspondiente al nodo resultante:

$$h_3 + h_4 = h_\Delta = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

$$h_\Delta = \frac{1}{4}(1-s)(1-r+1+r)$$

$$h_\Delta = \frac{1}{2}(1-s)$$

De este modo, las tres funciones de forma resultantes para el nuevo elemento triangular son:

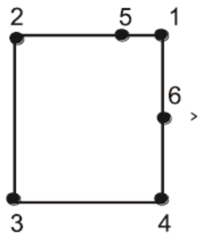
$$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

$$h_\Delta = \frac{1}{2}(1-s)$$

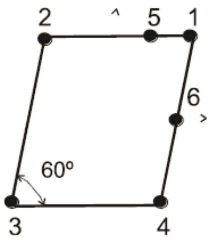
PROBLEMA 4 (CORREGIDO)

Se evaluará la matriz Jacobiana, el determinante del Jacobiano y el gradiente con respecto de las coordenadas cartesianas para los siguientes elementos en los puntos $(r=0, s=0)$ y $(r=\frac{1}{\sqrt{3}}, s=\frac{1}{\sqrt{3}})$.



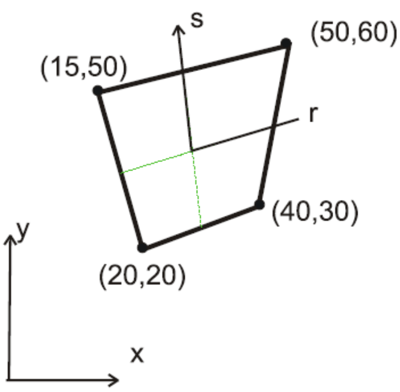
	1	2	3	4	5	6
X	2	0	0	2	1.5	2
Y	2	2	0	0	2	1

Caso **a)**



	1	2	3	4	5	6
x	3	1	0	2	2.5	2.5
y	2	2	0	0	2	1

Caso **b)**



Caso **c)**

La matriz Jacobiana de define a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial r, \partial s} = J \frac{\partial}{\partial x, \partial y}, \qquad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}$$

Para los casos a) y b)

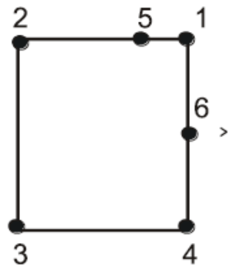
Ambos elementos poseen el mismo número de nodos dispuestos sobre los mismos lados del elemento, y en consecuencia, el mismo número y formulación de funciones de forma.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial r} & \frac{\partial h_3}{\partial r} & \frac{\partial h_4}{\partial r} & \frac{\partial h_5}{\partial r} & \frac{\partial h_6}{\partial r} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial s} & \frac{\partial h_3}{\partial s} & \frac{\partial h_4}{\partial s} & \frac{\partial h_5}{\partial s} & \frac{\partial h_6}{\partial s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{bmatrix}$$

Para h_1	**Para h_2**
$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) - \frac{1}{2}h_5 - \frac{1}{2}h_6$ $\frac{\partial h_1}{\partial r} = \frac{1}{4}(s+2r)(1+s)$ $\frac{\partial h_1}{\partial s} = \frac{1}{4}(r+2s)(1+r)$	$h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) - \frac{1}{2}h_5$ $\frac{\partial h_2}{\partial r} = \frac{1}{4}(2r-1)(1+s)$ $\frac{\partial h_2}{\partial s} = \frac{1}{4}r(r-1)$
Para h_3	**Para h_4**
$h_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$ $\frac{\partial h_3}{\partial r} = -\frac{1}{4}(1-s)$ $\frac{\partial h_3}{\partial s} = -\frac{1}{4}(1-r)$	$h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) - \frac{1}{2}h_6$ $\frac{\partial h_4}{\partial r} = \frac{1}{4}s(s-1)$ $\frac{\partial h_4}{\partial s} = \frac{1}{4}(2s-1)(1+r)$
Para h_5	**Para h_6**
$h_5 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s)$ $\frac{\partial h_5}{\partial r} = -r(1+s)$ $\frac{\partial h_5}{\partial s} = \frac{1}{2}(1-r^2)$	$h_6 = \frac{1}{2}(1-s^2)(1+r)$ $\frac{\partial h_6}{\partial r} = \frac{1}{2}(1-s^2)$ $\frac{\partial h_6}{\partial s} = -s(1+r)$

Evaluando las expresiones anteriores con Matlab ®, los resultados son los siguientes:

Para el caso a)



	1	2	3	4	5	6
X	2	0	0	2	1.5	2
Y	2	2	0	0	2	1

Caso **a)**

La matriz de coordenadas cartesianas de los nodos es:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1.5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- En $(r = 0, s = 0)$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det(J) = 1, \qquad J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla H = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial h_6}{\partial x} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial h_6}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1}. \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial r} & \cdots & \frac{\partial h_6}{\partial r} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial s} & \cdots & \frac{\partial h_6}{\partial s} \end{bmatrix}$$

$$\nabla H = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/16 & -3/16 & -1/4 & 1/2 & -1/8 \end{bmatrix}$$

- En $\left(r = \frac{1}{\sqrt{3}}, s = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

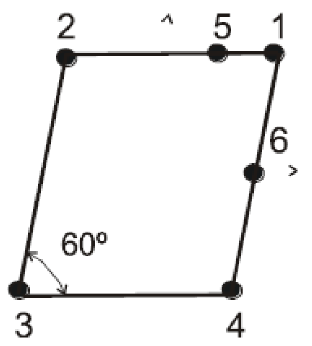
$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5447 & 0 \\ 0.1667 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det(J) = 0.5447$$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8360 & 0 \\ -0.3060 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla H =$$

$$\nabla H = \begin{bmatrix} 1.2540 & 0.1120 & -0.1940 & -0.1120 & -1.6720 & 0.6120 \\ 0.4740 & -0.0797 & -0.0733 & 0.0797 & 0.6120 & -1.0127 \end{bmatrix}$$

Para el caso b)



	1	2	3	4	5	6
x	3	1	0	2	2.5	2.5
y	2	2	0	0	2	1

Caso **b)**

La matriz de coordenadas cartesianas de los nodos es:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2.5 & 2 \\ 2.5 & 1 \end{bmatrix}$$

- En $(r = 0, s = 0)$

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det(J) = 1, \qquad J^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial x} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3/4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x} & \dfrac{\partial h_2}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial h_6}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial y} & \dfrac{\partial h_2}{\partial y} & \cdots & \dfrac{\partial h_6}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1}. \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial r} & \dfrac{\partial h_2}{\partial r} & \cdots & \dfrac{\partial h_6}{\partial r} \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial s} & \dfrac{\partial h_2}{\partial s} & \cdots & \dfrac{\partial h_6}{\partial s} \end{bmatrix}$$

$$\nabla H = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3/16 & -1/16 & -1/4 & 1/2 & -3/8 \end{bmatrix}$$

- En $\left(r = \frac{1}{\sqrt{3}}, s = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

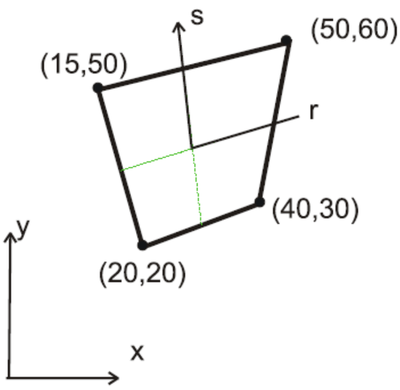
$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5447 & 0 \\ 0.6667 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(J) = 0.5447$$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial x} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8360 & 0 \\ -1.2240 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla H = \begin{bmatrix} 1.2540 & 0.1120 & -0.1940 & -0.1120 & -1.6720 & 0.6120 \\ -0.1530 & -0.1357 & 0.0237 & 0.1357 & 1.4480 & -1.3187 \end{bmatrix}$$

Para el Caso c)



Caso **c)**

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial r} & \frac{\partial h_3}{\partial r} & \frac{\partial h_4}{\partial r} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial s} & \frac{\partial h_3}{\partial s} & \frac{\partial h_4}{\partial s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 60 \\ 15 & 50 \\ 20 & 20 \\ 40 & 30 \end{bmatrix}$$

Para h_1	Para h_2
$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$ $\frac{\partial h_1}{\partial r} = \frac{1}{4}(1+s)$ $\frac{\partial h_1}{\partial s} = \frac{1}{4}(1+r)$	$h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$ $\frac{\partial h_2}{\partial r} = -\frac{1}{4}(1+s)$ $\frac{\partial h_2}{\partial s} = \frac{1}{4}(1-r)$
Para h_3	**Para h_4**
$h_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$ $\frac{\partial h_3}{\partial r} = -\frac{1}{4}(1-s)$ $\frac{\partial h_3}{\partial s} = -\frac{1}{4}(1-r)$	$h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$ $\frac{\partial h_4}{\partial r} = \frac{1}{4}(1-s)$ $\frac{\partial h_4}{\partial s} = -\frac{1}{4}(1+r)$

- En $(r = 0, s = 0)$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{55}{4} = 13.75 & 5 \\ \frac{5}{4} = 1.25 & 15 \end{bmatrix}, \qquad \det(J) = 200$$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{40} = 0.0750 & -\frac{1}{40} = -0.0250 \\ -\frac{1}{160} = -0.0063 & \frac{11}{160} = 0.0688 \end{bmatrix}$$

$$\nabla H = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial h_6}{\partial x} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial h_6}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1}. \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial r} & \cdots & \frac{\partial h_6}{\partial r} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial s} & \cdots & \frac{\partial h_6}{\partial s} \end{bmatrix}$$

$$\nabla H = \begin{bmatrix} 0.0125 & -0.0250 & -0.0125 & 0.0250 \\ 0.0156 & 0.0188 & -0.0156 & -0.0188 \end{bmatrix}$$

- En $\left(r = \frac{1}{\sqrt{3}}, s = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

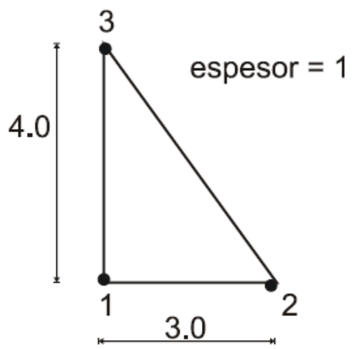
$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4122}{259} = 15.9151 & 5 \\ \frac{2131}{624} = 3.4151 & 15 \end{bmatrix}, \qquad \det(J) = \frac{18397}{83} = 221.6506$$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{103}{1522} = 0.0677 & -\frac{103}{4566} = -0.0226 \\ -\frac{52}{3375} = -0.0154 & \frac{96}{1337} = 0.0718 \end{bmatrix}$$

$$\nabla H = \begin{bmatrix} 0.0178 & -0.0291 & -0.0048 & 0.0160 \\ 0.0222 & 0.0137 & -0.0060 & -0.0299 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 5 (CORREGIDO)

Se evaluará el vector de fuerza volumétrico $\boldsymbol{R_V}$ cuando el elemento de la figura siguiente está sometido a una fuerza por unidad de volumen de $\boldsymbol{f}^{B(m)} = 10e_x + 5e_y$.



En forma general, para un conjunto de elementos finitos, dicho vector está definido como:

$$\boldsymbol{R_V} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \boldsymbol{H}^{(m)T} \boldsymbol{f}^{B(m)} dV^{(m)}$$

Dado que solo se considera un elemento, solo se tendrá en cuenta una integral sobre el volumen:

$$\boldsymbol{R_V} = \int_{V^{(m)}} \boldsymbol{H}^{(m)T} \boldsymbol{f}^{B(m)} dV^{(m)}$$

Se presentan las siguientes definiciones:

$$\boldsymbol{H}^T = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}^{B(m)} = \begin{bmatrix} f_x^B \\ f_y^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad dV^{(m)} = det(J)\ t\ dr\ ds$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_1 \\ h_2 & 0 \\ 0 & h_2 \\ h_3 & 0 \\ 0 & h_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial r} & \frac{\partial h_3}{\partial r} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial s} & \frac{\partial h_3}{\partial s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

Reemplazamos:

$$\boldsymbol{R_V} = \int_{r1}^{r2} \int_{s1}^{s2} \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_1 \\ h_2 & 0 \\ 0 & h_2 \\ h_3 & 0 \\ 0 & h_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_x^B \\ f_y^B \end{bmatrix} det(\boldsymbol{J}_i)\ t\ ds\ dr = \int_{r1}^{r2} \int_{s1}^{s2} \begin{bmatrix} h_1 f_x^B \\ h_1 f_y^B \\ h_2 f_x^B \\ h_2 f_y^B \\ h_3 f_x^B \\ h_3 f_y^B \end{bmatrix} det(\boldsymbol{J})\ t\ ds\ dr = \begin{bmatrix} f_{1x}^B \\ f_{1y}^B \\ f_{2x}^B \\ f_{2y}^B \\ f_{3x}^B \\ f_{3y}^B \end{bmatrix}$$

Para determinar las funciones de interpolación, partimos de un elemento cuadrangular de cuatro nodos. Las funciones de forma del elemento cuadrilateral son:

$$h_1 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s), \qquad h_2 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

$$h_{3*} = \frac{1}{4}(1+r)(1+s), \qquad h_4 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

Sumamos las funciones 3 y 4 para colapsar dos nodos en uno:

$$h_3 = h_{3*} + h_4 = \frac{1}{2}(1+s)$$

De este modo, las funciones de forma definitivas para el elemento triangular son:

Para h_1	Para h_2
$h_1 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$ $\frac{\partial h_1}{\partial r} = -\frac{1}{4}(1-s)$	$h_2 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$ $\frac{\partial h_2}{\partial r} = \frac{1}{4}(1-s)$

$\frac{\partial h_1}{\partial s} = -\frac{1}{4}(1-r)$	$\frac{\partial h_2}{\partial s} = -\frac{1}{4}(1+r)$
Para h_3	
$h_3 = \frac{1}{2}(1+s)$ $\frac{\partial h_3}{\partial r} = 0$ $\frac{\partial h_3}{\partial s} = \frac{1}{2}$	

Se concluye hasta este punto, que el operador Jacobiano es función de las coordenadas naturales r y s.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1-s) & \frac{1}{4}(1-s) & 0 \\ -\frac{1}{4}(1-r) & -\frac{1}{4}(1+r) & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}(1-s) & 0 \\ -\frac{3}{4}(1+r) & 2 \end{bmatrix}, \qquad \det(J) = \frac{3}{2}(1-s)$$

Ahora podemos calcular las componentes de las fuerzas concentradas en cada nodo, que surgen como producto de la fuerza que actúa sobre el volumen del elemento:

$$\boldsymbol{R_V} = \int_{r1}^{r2} \int_{s1}^{s2} \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_1 \\ h_2 & 0 \\ 0 & h_2 \\ h_3 & 0 \\ 0 & h_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_x^B \\ f_y^B \end{bmatrix} \, det(J) \, t \, ds \, dr$$

$$\boldsymbol{R_V} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[\frac{(1-r)(1-s)}{4}\right] \frac{3}{2}(1-s) \, t \, ds \, dr & 0 \\ 0 & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[\frac{(1-r)(1-s)}{4}\right] \frac{3}{2}(1-s) \, t \, ds \, dr \\ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[\frac{(1+r)(1-s)}{4}\right] \frac{3}{2}(1-s) \, t \, ds \, dr & 0 \\ 0 & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[\frac{(1+r)(1-s)}{4}\right] \frac{3}{2}(1-s) \, t \, ds \, dr \\ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[\frac{(1+s)}{2}\right] \frac{3}{2}(1-s) \, t \, ds \, dr & 0 \\ 0 & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[\frac{(1+s)}{2}\right] \frac{3}{2}(1-s) \, t \, ds \, dr \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_x^B \\ f_y^B \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R_V} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-r)(1-s)^2\, t\, ds\, dr & 0 \\ 0 & \frac{3}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-r)(1-s)^2\, t\, ds\, dr \\ \frac{3}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1+r)(1-s)^2\, t\, ds\, dr & 0 \\ 0 & \frac{3}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1+r)(1-s)^2\, t\, ds\, dr \\ \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-s^2)\, t\, ds\, dr & 0 \\ 0 & \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-s^2)\, t\, ds\, dr \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_x^B \\ f_y^B \end{bmatrix}$$

Finalmente, las componentes de las fuerzas nodales son:

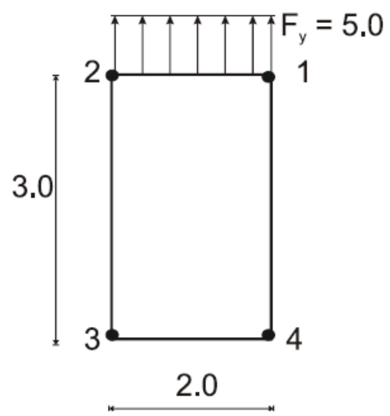
$$\boldsymbol{R_V} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1x}^B \\ f_{1y}^B \\ f_{2x}^B \\ f_{2y}^B \\ f_{3x}^B \\ f_{3y}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 6

Se evaluará el vector de fuerza superficial $\boldsymbol{R_S}$ para dos elementos.

Parte a)

El primero de ellos está descrito por la siguiente figura:



$$\boldsymbol{R_S} = \int_S \boldsymbol{H}^{S(m)^T} \boldsymbol{f}^{S(m)}\, dS^{(m)}$$

Para conformar la matriz de interpolación para los nodos de la superficie (línea) se requiere evaluar las funciones de forma del elemento sobre la coordenada natural sobre la cual ejerce influencia la carga uniformemente distribuida o fuerza F_y.

$$h_1 = \left[\frac{1}{4}(1+r)(1+s)\right]_{s=1} = \frac{1}{2}(1+r), \qquad h_2 = \left[\frac{1}{4}(1-r)(1+s)\right]_{s=1} = \frac{1}{2}(1-r)$$

$$\boldsymbol{H}^S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+r) & 0 & \frac{1}{2}(1-r) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+r) & 0 & \frac{1}{2}(1-r) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}^{S^T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+r) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+r) \\ \frac{1}{2}(1-r) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-r) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definimos ahora el vector de fuerzas por unidad de área. En este caso, por unidad de longitud.

$$\boldsymbol{f}^S = \begin{bmatrix} f_x^S \\ f_y^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Luego, hallamos la corrección para el diferencial de longitud al introducir el Jacobiano de la transformación o $\det(\boldsymbol{J}^S)$.

$$dS = dl = \det(\boldsymbol{J}^S)\, dr, \qquad \det(\boldsymbol{J}^S) = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{x_1 - x_2}{2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{y_1 - y_2}{2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = 1, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = 0$$

$$\det(J^S) = 1$$

Finalmente, evaluamos el vector de fuerzas superficiales:

$$\boldsymbol{R_S} = \int_S \boldsymbol{H}^{S(m)^T} \boldsymbol{f}^{S(m)} dS^{(m)}$$

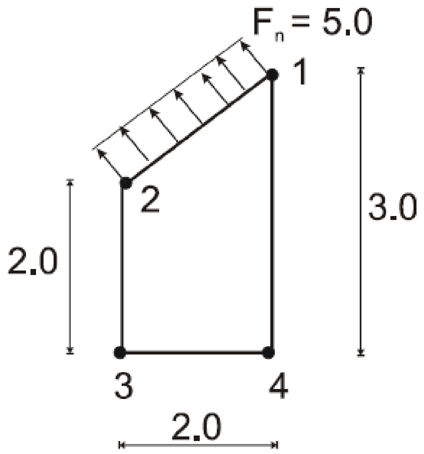
$$\boldsymbol{R_S} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1+r) & 0 \\ 0 & (1+r) \\ (1-r) & 0 \\ 0 & (1-r) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} dr$$

$$\boldsymbol{R_S} = \int_{-1}^{1} \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ (1+r) \\ 0 \\ (1-r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dr = \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \int_{-1}^{1} (1+r) dr \\ 0 \\ \int_{-1}^{1} (1-r) dr \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1x}^S \\ f_{1y}^S \\ f_{2x}^S \\ f_{2y}^S \\ f_{3x}^S \\ f_{3y}^S \\ f_{4y}^S \\ f_{4y}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La fuerza resultante es de 10 unidades de fuerza en la dirección y. A cada nodo le corresponde la mitad de la fuerza resultante debido a que la carga es uniformemente distribuida y es simétrica.

Parte b)

Se evaluará nuevamente el vector de fuerzas superficiales $\boldsymbol{R_S}$.



Nuevamente, evaluamos las funciones de forma sobre la línea sobre la cual está aplicada la carga superficial.

$$h_1 = \left[\frac{1}{4}(1+r)(1+s)\right]_{s=1} = \frac{1}{2}(1+r), \qquad h_2 = \left[\frac{1}{4}(1-r)(1+s)\right]_{s=1} = \frac{1}{2}(1-r)$$

$$h_3 = \left[\frac{1}{4}(1-r)(1-s)\right]_{s=1} = 0, \qquad h_4 = \left[\frac{1}{4}(1+r)(1-s)\right]_{s=1} = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+r) & 0 & \frac{1}{2}(1-r) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+r) & 0 & \frac{1}{2}(1-r) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+r) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+r) \\ \frac{1}{2}(1-r) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-r) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definimos el vector de carga superficial como:

$$f^S = \begin{bmatrix} f_x^S \\ f_y^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_n.sen(\alpha) \\ F_n.\cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.2361 \\ 4.4721 \end{bmatrix}$$

Donde α es el ángulo que forma la vertical con F_n, y también el mismo ángulo que forma la horizontal con la línea entre los nodos 2 y 1. En este caso, el vector f^S posee unidades de fuerza sobre unidad de longitud.

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$$

Hallamos también la corrección para el diferencial de longitud al introducir el Jacobiano de la transformación o $\det(\boldsymbol{J}^S)$.

$$dS = dl = \det(J^S)\, dr, \qquad \det(J^S) = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{y}_1 \\ \hat{x}_2 & \hat{y}_2 \\ \hat{x}_3 & \hat{y}_3 \\ \hat{x}_4 & \hat{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\hat{x}_1 - \hat{x}_2}{2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_2}{2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{2-0}{2} = 1, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\det(J^S) = \left[1 + \frac{1}{4}\right]^{1/2} = \left[\frac{5}{4}\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Procedemos a calcular el vector de fuerza superficial:

$$\boldsymbol{R_S} = \int_S \boldsymbol{H}^{S(m)^T} \boldsymbol{f}^{S(m)}\, dS^{(m)}$$

$$\boldsymbol{R_S} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1+r) & 0 \\ 0 & (1+r) \\ (1-r) & 0 \\ 0 & (1-r) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2.2361 \\ 4.4721 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2}\, dr$$

Se calculan las integrales:

$$\int_{-1}^{1} (1+r) dr = 2$$

$$\int_{-1}^{1} (1-r) dr = 2$$

El vector resultante posee componentes en x e y, como se esperaba.

$$\boldsymbol{R_S} = \frac{\sqrt{5}}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2.2361 \\ 4.4721 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1x}^S \\ f_{1y}^S \\ f_{2x}^S \\ f_{2y}^S \\ f_{3x}^S \\ f_{3y}^S \\ f_{4y}^S \\ f_{4y}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 5 \\ -2.5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$