

# **INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

## **TRABAJO PRÁCTICO 3**

**PROBLEMA TÉRMICO**

**Estudiante**

**FREDY ANDRÉS MERCADO NAVARRO**

**Pasaporte: 98`773.532**

**Maestría en Simulación Numérica y Control**

**Cuatrimestre: II-2011**

**06 de Diciembre de 2011**



**Universidad de Buenos Aires  
Ciudad Autónoma de Buenos Aires  
Argentina**

### PROBLEMA 1

El principio de las temperaturas virtuales corresponde a la condición estacionaria del siguiente funcional, propuesto por Bathe et al en la ecuación 7.10 de la referencia [1]:

$$\Pi = \int_V \frac{1}{2} \left[ k_x \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + k_z \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] dV - \int_V \theta q^B dV - \int_{S_q} \theta^S q^S dS - \sum_i \theta^i Q^i$$

Naturalmente, nuestro problema es bidimensional, por lo cual asumimos que la dimensión en Z es unitaria. Al mismo tiempo, asumimos que la conductividad es igual tanto en X como en Y, y preparamos la ecuación para la introducción de la variación que nos permitirá deducir las ecuaciones que gobiernan nuestro problema:

$$\Pi = \int_A \frac{1}{2} \left[ \left( k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \left( k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] dA - \int_A \theta q^B dA - \int_{S_q} \theta^S q^S dS - \sum_i \theta^i Q^i$$

Luego, invocando  $\delta \Pi = 0$ , se obtiene:

$$\delta \Pi = \int_A \left[ \left( k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \left( \delta \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \left( k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \left( \delta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] dA - \int_A \delta \theta q^B dA - \int_{S_q} \delta \theta^S q^S dS - \sum_i \delta \theta^i Q^i = 0$$

#### Ecuación 1

Aplicando las reglas operativas de los operadores diferenciales para el operador variacional, obtenemos:

$$\delta \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial (\delta \theta)}{\partial x}$$

Realizamos la transformación anterior y reemplazamos en los dos términos de la primera integral en la Ecuación 1. Posteriormente, aplicamos la teoría contenida en el apéndice G de la referencia [2], donde integramos por partes y aplicamos el teorema de Green para transformar una integral sobre un área en una integral de línea sobre el contorno:

Primer término, en x:

$$\int_A \left( k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial (\delta \theta)}{\partial x} \right) dA = \oint_{\Gamma} \left( k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) n_x \delta \theta d\Gamma - \int \int_A \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \delta \theta dA$$

#### Ecuación 2

Segundo término, en y:

$$\int_A \left( k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial (\delta \theta)}{\partial y} \right) dA = \oint_{\Gamma} \left( k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) n_y \delta \theta d\Gamma - \int \int_A \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \delta \theta dA$$

#### Ecuación 3

Donde  $n_x$  y  $n_y$  son las componentes del vector normal a la superficie o línea de contorno en el caso 2D.

La suma de la Ecuación 2 y Ecuación 3 resulta:

$$\begin{aligned} & \int_A \left[ \left( k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \left( \delta \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \left( k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \left( \delta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] dA \\ &= \oint_{\Gamma} \left( k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} n_y \right) \delta \theta d\Gamma - \int \int_A \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] \delta \theta dA \end{aligned}$$

Reemplazamos la expresión anterior en la Ecuación 1:

$$\begin{aligned} & - \int_A \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] \delta \theta dA - \int_A \delta \theta q^B dA + \int_{\Gamma} \left[ k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} n_y \right] \delta \theta d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \delta \theta^{\Gamma} q^{\Gamma} d\Gamma - \sum_i \delta \theta^i Q^i = 0 \end{aligned}$$

Luego agrupamos los términos con factores y operadores comunes. En este paso también se asume que las conductividades térmicas en x e y,  $k_x$  y  $k_y$ , son constantes e iguales:

$$\int_A \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( -k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - q^B \right] \delta \theta dA + \int_{\Gamma} \left( k_n \frac{\partial \theta}{\partial n} - q^{\Gamma} \right) \delta \theta d\Gamma - \sum_i \delta \theta^i Q^i = 0$$

La variación  $\delta \theta$  puede ser arbitraria pero debe ser cero en el contorno esencial (en la superficie, o en este caso, en los bordes). Para cumplir con la ecuación se requiere entonces, que:

#### **Equilibrio de calor al interior del cuerpo:**

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - q^B = 0$$

#### **Condición de equilibrio en la superficie:**

$$k_n \frac{\partial \theta}{\partial n} - q^{\Gamma} = 0$$

Siendo:

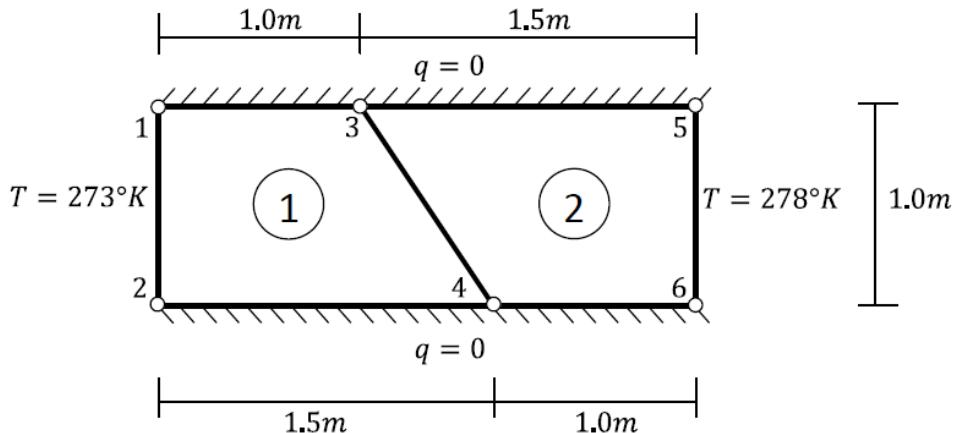
$$q_x = -k_x \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad q_y = -k_y \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

La expresión siguiente resume la ecuación que gobierna el equilibrio del flujo de calor en el área de nuestro problema. A esta ecuación solo resta aplicarle la discretización para elementos finitos, transformándola a matrices y vectores para ser utilizada en la resolución de nuestro problema isotrópico lineal de conducción bidimensional.

$$k \nabla^2 \theta = q^B$$

### PROBLEMA 2

En este problema se calculará la temperatura en los nodos 3 y 4 de la siguiente figura, integrando numéricamente mediante el método de Gauss-Legendre utilizando 2 x 2 puntos de integración.



Definimos primero las siguientes expresiones:

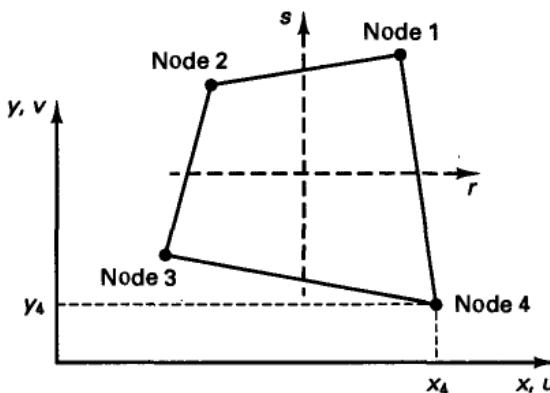
$$K^k = \sum_m \int_{V^m} B^{(m)T} k^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)}$$

Para los cálculos numéricos se utilizará la conductividad térmica indicada para el problema 3 ( $k=440 \text{ K.W/m}$ ).

$$B = \nabla H = J^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial r} & \frac{\partial h_3}{\partial r} & \frac{\partial h_4}{\partial r} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial s} & \frac{\partial h_3}{\partial s} & \frac{\partial h_4}{\partial s} \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}, \quad dV = \det(J) dr ds$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial r} & \frac{\partial h_3}{\partial r} & \frac{\partial h_4}{\partial r} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial s} & \frac{\partial h_3}{\partial s} & \frac{\partial h_4}{\partial s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{y}_1 \\ \hat{x}_2 & \hat{y}_2 \\ \hat{x}_3 & \hat{y}_3 \\ \hat{x}_4 & \hat{y}_4 \end{bmatrix}$$

Dado que ambos elementos son cuadriláteros con 1 nodo en cada vértice, las funciones de forma para ambos elementos son las mismas. La numeración de los nodos se desarrolló en base a la Ilustración 1:



**Ilustración 1.** Convención para numeración de nodos locales.

Para $\mathbf{h}_1$	Para $\mathbf{h}_2$
$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$ $\frac{\partial h_1}{\partial r} = \frac{1}{4}(1+s)$ $\frac{\partial h_1}{\partial s} = \frac{1}{4}(1+r)$	$h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$ $\frac{\partial h_2}{\partial r} = -\frac{1}{4}(1+s)$ $\frac{\partial h_2}{\partial s} = \frac{1}{4}(1-r)$
Para $\mathbf{h}_3$	Para $\mathbf{h}_4$
$h_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$ $\frac{\partial h_3}{\partial r} = -\frac{1}{4}(1-s)$ $\frac{\partial h_3}{\partial s} = -\frac{1}{4}(1-r)$	$h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$ $\frac{\partial h_4}{\partial r} = \frac{1}{4}(1-s)$ $\frac{\partial h_4}{\partial s} = -\frac{1}{4}(1+r)$

A continuación se desarrolla la ilustración del programa desarrollado para el cálculo numérico de las temperaturas. El programa utilizado para los cálculos es el Matlab ®.

### Código Desarrollado

Se ilustrará directamente con el código el algoritmo desarrollado para los cálculos:

```
%PARA TODOS LOS ELEMENTOS
```

1. Definimos una matriz con las conductividades en las direcciones x e y.

```
kx=440;
ky=440;
k=[kx 0;0 ky];
```

2. Definimos un vector con los puntos de Gauss a ser evaluados más adelante.

```
puntogauss=[-1/sqrt(3), 1/sqrt(3)];
```

```
%PARA ELEMENTOS 1 Y 2
```

3. Definimos las coordenadas de los nodos de cada elemento.

```
coord1=[1 1;0 1;0 0;1.5 0]
coord2=[2.5 1;1 1;1.5 0;2.5 0]
```

4. Se define el tamaño de las matrices elementales. Inicialmente, llenas con valores de cero.

```
K1=zeros(4,4);
K2=zeros(4,4);
```

## %CÁLCULO DE MATRICES DE RIGIDEZ ELEMENTALES

5. En los dos ciclos siguientes se llenan las matrices de rigidez elementales, calculando el aporte a la matriz de rigidez elemental a partir de la aplicación de la siguiente ecuación en las coordenadas de cada punto de Gauss:

$$K^k = \sum_m \int_{V^m} B^{(m)T} k^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)}$$

```

for j=1:2
    for i=1:2
        r=puntogauss(i);
        s=puntogauss(j);

        dh1dr=(1/4)*(1+s);
        dh1ds=(1/4)*(1+r);

        dh2dr=-(1/4)*(1+s);
        dh2ds=(1/4)*(1-r);

        dh3dr=-(1/4)*(1-s);
        dh3ds=-(1/4)*(1-r);

        dh4dr=(1/4)*(1-s);
        dh4ds=-(1/4)*(1+r);

        matrizdhdr=[dh1dr dh2dr dh3dr dh4dr; ...
                    dh1ds dh2ds dh3ds dh4ds];

        J1=matrizdhdr*coord1; %Op. Jacobiano Elemento 1
        J2=matrizdhdr*coord2; %Op. Jacobiano Elemento 2

        B1=inv(J1)*matrizdhdr; %Gradiente de H Elemento 1
        B2=inv(J2)*matrizdhdr; %Gradiente de H Elemento 2

        F1=B1'*k*B1*det(J1); %Apunte por cada evaluación de ri,si a Elem. 1
        F2=B2'*k*B2*det(J2); %Apunte por cada evaluación de ri,si a Elem. 2

        K1=F1+K1; %Llenado de matriz elemental Elemento 1
        K2=F2+K2; %Llenado de matriz elemental Elemento 2
    end
end

K1
K2

```

## %ENSAMBLE DE MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

6. Se define el tamaño de la matriz de rigidez global y se llena de ceros. También se define la matriz de conectividad de acuerdo a la siguiente tabla:

Numeración Global		
Nodo local	Elemento	
	1	2
1	3	5
2	1	3

<b>3</b>	2	4
<b>4</b>	4	6

```
K=zeros(6,6);
cgl=[3 5;1 3;2 4;4 6] %Matriz de conectividad Nodo # Local <-> # Global
```

7. Con los siguientes ciclos se recorren las matrices de rigidez elementales y sus valores se suman a la matriz de rigidez global.

```
for j=1:4
    e=1;
    for i=1:4
        K(cgl(i,e),cgl(j,e))=K(cgl(i,e),cgl(j,e))+K1(i,j);
    end
    e=2;
    for i=1:4
        K(cgl(i,e),cgl(j,e))=K(cgl(i,e),cgl(j,e))+K2(i,j);
    end
end
```

K

%CONDICIONES DE BORDE

8. Se definen las temperaturas a izquierda y derecha del objeto discretizado. Se crea el vector b en el cual se sumarán las evaluaciones de las temperaturas conocidas para la ecuación de cada nodo. El vector b1 posee los valores nodales de temperatura conocidos.

```
Tizq=273;
Tder=278;
b=zeros(6,1);
b1=zeros(6,1);
```

%Temperaturas Conocidas en los bordes del objeto

```
b1(1)=273;
b1(2)=273;
b1(5)=278;
b1(6)=278;
```

%Vector Auxiliar para la programación de las CB

9. Se define un vector auxiliar para facilitar la identificación de aquellas filas que pertenecen a valores nodales conocidos.

```
aux=zeros(6,1);
aux(1)=1;
aux(2)=1;
aux(5)=1;
aux(6)=1;
```

%Preparación de matriz K y vector b

```
% #1
% Se iguala a 1 el coeficiente de las T conocidas.
% Se calculan los K*T conocidos y se pasan al vector b.
```

```

% Se iguala a cero el coeficiente (i,j) tras el cálculo.

for j=1:6
    if aux(j,1)==1
        for i=1:6
            if i==j
                K(i,j)=1;
            else
                b(i,1)=-K(i,j)*b1(j,1)+b(i,1);
                K(i,j)=0;
            end
        end
    end
end

% #2
% Se le imponen las temperturas conocidas al vector b.

for i=1:6
    if aux(i)==1
        b(i)=b1(i);
    end
end

% #3
% Se igualan a cero las filas de temperturas conocidas
% a excepción de la diagonal.

for i=1:6
    if aux(i)==1
        for j=1:6
            if i~=j
                K(i,j)=0;
            end
        end
    end
end

aux
b
K

%Cálculo de incógnitas T3 y T4
T=K\b

```

## Resultados

Los valores de temperatura, en Kelvin, de los nodos globales 3 y 4 corresponden a las filas 3 y 4 del vector T.

```

T =
273.0000
273.0000
275.0000
276.0000
278.0000
278.0000

```

### PROBLEMA 3

En este problema se calcularán los flujos de calor  $\underline{q}$  de los cuatro puntos de Gauss.

El flujo de calor es un vector y se transforma de la misma forma que un desplazamiento. A continuación se desarrolla la formulación matricial para el cálculo de los flujos de calor en cada punto de Gauss. Tenemos que el flujo de calor obedece la ley de Fourier, donde el flujo se produce en la dirección en la cual existe un gradiente de temperaturas:

$$\underline{q} = -\underline{k} \cdot \nabla T$$

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix}$$

El gradiente se puede expresar en términos de coordenadas naturales para cada elemento. Así:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{\partial T}{\partial s} \end{bmatrix}$$

Reemplazando en la ecuación para el flujo de calor tenemos:

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{\partial T}{\partial s} \end{bmatrix}$$

La temperatura en cualquier punto dentro del elemento se puede expresar en términos de las funciones de forma y las temperaturas nodales:

$$T(r, s) = h_1 T_1 + h_2 T_2 + h_3 T_3 + h_4 T_4$$

A continuación observamos que podemos calcular una de las matrices como el operador jacobiano inverso. Esto se desarrollará en forma numérica. Haciendo uso de la expresión anterior, también expresamos las derivadas respecto a las coordenadas naturales en términos de las derivadas de las funciones de forma y los valores nodales de temperatura.

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{\partial T}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial r} & \frac{\partial h_3}{\partial r} & \frac{\partial h_4}{\partial r} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial s} & \frac{\partial h_3}{\partial s} & \frac{\partial h_4}{\partial s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{T}_1 \\ \hat{T}_2 \\ \hat{T}_3 \\ \hat{T}_4 \end{bmatrix}$$

Reemplazamos en la ecuación para los flujos de calor:

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial r} & \frac{\partial h_3}{\partial r} & \frac{\partial h_4}{\partial r} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_4}{\partial s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{T}_1 \\ \hat{T}_2 \\ \hat{T}_3 \\ \hat{T}_4 \end{bmatrix}$$

A continuación definimos la matriz B:

$$B = \nabla H = J^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial r} & \frac{\partial h_3}{\partial r} & \frac{\partial h_4}{\partial r} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_4}{\partial s} \end{bmatrix}$$

Finalmente, derivamos una expresión matricial para el cálculo de los flujos de calor en los puntos de Gauss, la cual se implementa directamente en el código computacional.

$$\underline{q} = -\underline{k} \cdot \underline{B} \cdot \underline{\hat{T}} = -\underline{k} \cdot \nabla H \cdot \underline{\hat{T}}$$

### Código Desarrollado

Las líneas de código siguientes son consecutivas con las líneas de código suministradas en el desarrollo del Problema 2.

1. Se definen dos vectores de temperatura local.

```
%CÁLCULO DE FLUJOS DE CALOR EN PUNTOS DE GAUSS
T1=zeros(4,1);
T2=zeros(4,1);

%Asignación de temperaturas correspondientes a Elementos 1 y 2
```

2. Se llenan los dos vectores de acuerdo a la numeración otorgada por la matriz de conectividad.

```
for i=1:4
    T1(i,1)=T(cgl(i,1));
    T2(i,1)=T(cgl(i,2));
end

T1
T2

% Cálculo de vectores de flujo de calor en X e Y
% Se requieren los vectores T1 Y T2.
```

'FLUJO EN LOS PUNTOS DE GAUSS'

3. En los siguientes ciclos se evalúan las expresiones en los puntos de Gauss. En cada ciclo se calcula el flujo de calor para uno de los puntos. Se utilizan los vectores de temperatura T1 y T2 hallados en el problema 2.

```
for j=1:2
    for i=1:2
        r=puntogauss(i);
        s=puntogauss(j);
```

```

dh1dr=(1/4)*(1+s);
dh1ds=(1/4)*(1+r);

dh2dr=-(1/4)*(1+s);
dh2ds=(1/4)*(1-r);

dh3dr=-(1/4)*(1-s);
dh3ds=-(1/4)*(1-r);

dh4dr=(1/4)*(1-s);
dh4ds=-(1/4)*(1+r);

matrizdhdr=[dh1dr dh2dr dh3dr dh4dr; ...
            dh1ds dh2ds dh3ds dh4ds];

J1=matrizdhdr*coord1;
J2=matrizdhdr*coord2;

B1=inv(J1)*matrizdhdr;
B2=inv(J2)*matrizdhdr;

'
r
s
q1=-k*B1*T1
q2=-k*B2*T2
end
end

```

## Resultados

Los valores del flujo de calor, en Watts, a través de cada nodo es igual para todos los puntos y solo posee componente en la dirección X. Así:

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 880 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**ANEXO****CÓDIGO COMPLETO PERTENECIENTE A PROBLEMAS 2 Y 3**

```
%TRABAJO PRÁCTICO 3 - IMEF
```

```
format compact
clear all
clc
```

```
%PARA TODOS LOS ELEMENTOS
```

```
kx=440;
ky=440;
k=[kx 0;0 ky];
```

```
puntogauss=[-1/sqrt(3), 1/sqrt(3)];
```

```
%PARA ELEMENTOS 1 Y 2
```

```
coord1=[1 1;0 1;0 0;1.5 0]
coord2=[2.5 1;1 1;1.5 0;2.5 0]
```

```
K1=zeros(4,4);
K2=zeros(4,4);
```

```
%CÁLCULO DE MATRICES DE RIGIDEZ ELEMENTALES
```

```
for j=1:2
    for i=1:2
        r=puntogauss(i);
        s=puntogauss(j);

        dh1dr=(1/4)*(1+s);
        dh1ds=(1/4)*(1+r);

        dh2dr=-(1/4)*(1+s);
        dh2ds=(1/4)*(1-r);

        dh3dr=-(1/4)*(1-s);
        dh3ds=-(1/4)*(1-r);

        dh4dr=(1/4)*(1-s);
        dh4ds=-(1/4)*(1+r);

        matrizdhdr=[dh1dr dh2dr dh3dr dh4dr;...
                    dh1ds dh2ds dh3ds dh4ds];
```

```
J1=matrizdhdr*coord1; %Op. Jacobiano Elemento 1
J2=matrizdhdr*coord2; %Op. Jacobiano Elemento 2
```

```
B1=inv(J1)*matrizdhdr; %Gradiente de H Elemento 1
B2=inv(J2)*matrizdhdr; %Gradiente de H Elemento 2
```

```
F1=B1'*k*B1*det(J1); %Aporte por cada evaluación de ri, si a Elem. 1
F2=B2'*k*B2*det(J2); %Aporte por cada evaluación de ri, si a Elem. 2
```

```

        K1=F1+K1; %Llenado de matriz elemental Elemento 1
        K2=F2+K2; %Llenado de matriz elemental Elemento 2
    end
end

K1
K2

%ENSAMBLE DE MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

K=zeros(6,6);
cgl=[3 5;1 3;2 4;4 6] %Matriz de conectividad Nodo # Local <-> # Global

for j=1:4
    e=1;
    for i=1:4
        K(cgl(i,e),cgl(j,e))=K(cgl(i,e),cgl(j,e))+K1(i,j);
    end
    e=2;
    for i=1:4
        K(cgl(i,e),cgl(j,e))=K(cgl(i,e),cgl(j,e))+K2(i,j);
    end
end
K

%CONDICIONES DE BORDE

Tizq=273;
Tder=278;
b=zeros(6,1);
b1=zeros(6,1);

%Temperaturas Conocidas en los bordes del objeto

b1(1)=273;
b1(2)=273;
b1(5)=278;
b1(6)=278;

%Vector Auxiliar para la programación de las CB

aux=zeros(6,1);
aux(1)=1;
aux(2)=1;
aux(5)=1;
aux(6)=1;

%Preparación de matriz K y vector b

%     #1
% Se iguala a 1 el coeficiente de las T conocidas.
% Se calculan los K*T conocidos y se pasan al vector b.
% Se iguala a cero el coeficiente (i,j) tras el cálculo.

for j=1:6
    if aux(j,1)==1
        for i=1:6

```

```

        if i==j
            K(i,j)=1;
        else
            b(i,1)=-K(i,j)*b1(j,1)+b(i,1);
            K(i,j)=0;
        end
    end
end

% #2
% Se le imponen las temperaturas conocidas al vector b.

for i=1:6
    if aux(i)==1
        b(i)=b1(i);
    end
end

% #3
% Se igualan a cero las filas de temperaturas conocidas
% a excepción de la diagonal.

for i=1:6
    if aux(i)==1
        for j=1:6
            if i~=j
                K(i,j)=0;
            end
        end
    end
end

aux
b
K

%Cálculo de incógnitas T3 y T4

T=K\b

%CÁLCULO DE FLUJOS DE CALOR EN PUNTOS DE GAUSS

T1=zeros(4,1);
T2=zeros(4,1);

%Asignación de temperaturas correspondientes a Elementos 1 y 2

for i=1:4
    T1(i,1)=T(cgl(i,1));
    T2(i,1)=T(cgl(i,2));
end

T1
T2

% Cálculo de vectores de flujo de calor en X e Y
% Se requieren los vectores T1 Y T2.

```

```
'FLUJO EN LOS PUNTOS DE GAUSS'

for j=1:2
    for i=1:2
        r=puntogauss(i);
        s=puntogauss(j);

        dh1dr=(1/4)*(1+s);
        dh1ds=(1/4)*(1+r);

        dh2dr=-(1/4)*(1+s);
        dh2ds=(1/4)*(1-r);

        dh3dr=-(1/4)*(1-s);
        dh3ds=-(1/4)*(1-r);

        dh4dr=(1/4)*(1-s);
        dh4ds=-(1/4)*(1+r);

        matrizdhdr=[dh1dr dh2dr dh3dr dh4dr; ...
                    dh1ds dh2ds dh3ds dh4ds];

        J1=matrizdhdr*coord1;
        J2=matrizdhdr*coord2;

        B1=inv(J1)*matrizdhdr;
        B2=inv(J2)*matrizdhdr;

        '
        _____
        r
        s
        q1=-k*B1*T1
        q2=-k*B2*T2
    end
end
```

### SALIDA DEL CÓDIGO PARA PROBLEMAS 2 Y 3

```
coord1 =
 1.0000 1.0000
 0 1.0000
 0 0
1.5000 0

coord2 =
 2.5000 1.0000
 1.0000 1.0000
 1.5000 0
 2.5000 0

K1 =
398.3784 -68.3784 -211.0811 -118.9189
-68.3784 288.3784 -118.9189 -101.0811
-211.0811 -118.9189 335.9459 -5.9459
```

-118.9189 -101.0811 -5.9459 225.9459

K2 =

335.9459 -5.9459 -211.0811 -118.9189  
-5.9459 225.9459 -118.9189 -101.0811  
-211.0811 -118.9189 398.3784 -68.3784  
-118.9189 -101.0811 -68.3784 288.3784

cgl =

3	5
1	3
2	4
4	6

K =

288.3784 -118.9189 -68.3784 -101.0811 0 0  
-118.9189 335.9459 -211.0811 -5.9459 0 0  
-68.3784 -211.0811 624.3243 -237.8378 -5.9459 -101.0811  
-101.0811 -5.9459 -237.8378 624.3243 -211.0811 -68.3784  
0 0 -5.9459 -211.0811 335.9459 -118.9189  
0 0 -101.0811 -68.3784 -118.9189 288.3784

aux =

1
1
0
0
1
1

b =

1.0e+005 \*  
0.0027  
0.0027  
1.0605  
1.0691  
0.0028  
0.0028

K =

1.0000	0	0	0	0	0
0	1.0000	0	0	0	0
0	0	624.3243	-237.8378	0	0
0	0	-237.8378	624.3243	0	0
0	0	0	0	1.0000	0
0	0	0	0	0	1.0000

T =

273.0000  
273.0000  
275.0000

276.0000  
278.0000  
278.0000

T1 =  
275.0000  
273.0000  
273.0000  
276.0000

T2 =  
278.0000  
275.0000  
276.0000  
278.0000

ans =  
FLUJO EN LOS PUNTOS DE GAUSS  
ans =

---

r =  
-0.5774  
s =  
-0.5774  
q1 =  
-880.0000  
0.0000  
q2 =  
-880.0000  
0.0000  
ans =

---

r =  
0.5774  
s =  
-0.5774  
q1 =  
-880.0000  
0.0000  
q2 =  
-880.0000  
0.0000  
ans =

---

r =  
-0.5774  
s =  
0.5774  
q1 =  
-880.0000

```
0.0000
q2 =
-880.0000
0.0000
ans =
_____
r =
0.5774
s =
0.5774
q1 =
-880.0000
0.0000
q2 =
-880.0000
0.0000
>>
```

**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

1. BATHE, Klaus-Jurgen. Finite Element Procedures. Prentice-Hall. 1996. PP 646.
2. ZIENKIEWICS, O.C. TAYLOR, R.L. The Finite Element Method. Volume I: The Basis. Fifth Edition. 2000.