INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

TRABAJO PRÁCTICO 4

PROBLEMA DE ELASTICIDAD LINEAL

Estudiante

FREDY ANDRÉS MERCADO NAVARRO
Pasaporte: 98´773.532
Maestría en Simulación Numérica y Control
Cuatrimestre: II-2011
14 de Diciembre de 2011

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires
Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Argentina

PROBLEMA 1

Obtendremos las expresiones necesarias para resolver el problema de elasticidad lineal estacionario a partir de un principio variacional. A continuación obtendremos las mismas ecuaciones cuya deducción proviene del principio de los desplazamientos virtuales a partir de la minimización del potencial total de un cuerpo elástico lineal cuyos esfuerzos iniciales son cero. La ecuación para el potencial total está propuesta en el texto de K.J. Bathe, referencia [1]:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \epsilon^T C\epsilon \, dV - \int_V U^T f^B \, dV - \int_{S_f} U_{Sf}^T f_{Sf} \, dS - \sum_i U_i^T R_{iC}$$

Ecuación 1

$$\tau = C\epsilon$$

C: matriz de esfuerzos-desplazamientos del material.

Luego, asumiendo un estado donde las variaciones del potencial son cero con respecto a los desplazamientos y utilizando el hecho de que la matriz C es simétrica, obtenemos:

$$\delta\Pi = 0$$

$$\int_V \delta\epsilon^T \tau \, dV = \int_V \delta U^T f^B \, dV + \int_{S_f} \delta U_{Sf}^T f_{Sf} \, dS + \sum_i \delta U_i^T R_{iC}$$

Ecuación 2

Sin embargo, para evaluar Π en la Ecuación 1 los desplazamientos deben satisfacer las condiciones de borde pertenecientes a desplazamientos (de Dirichlet). Por esta razón, en la Ecuación 2 se consideran variaciones arbitrarias de los desplazamientos en cualquier parte del cuerpo, menos para aquellas variaciones correspondientes a condiciones de borde, en los cuales dichas variaciones son iguales a cero.

Consecuentemente con lo anterior, se concluye que la minimización del funcional con respecto a los desplazamientos es equivalente a usar el principio de los desplazamientos virtuales, por lo cual podemos escribir:

$$\delta\epsilon \equiv \bar{\epsilon}, \qquad \delta U \equiv \overline{U}, \qquad \delta U_{Sf} \equiv \overline{U}_{Sf}, \qquad \delta U_i \equiv \overline{U}_i$$

De este modo, obtenemos el principio de los desplazamientos virtuales:

$$\int_V \bar{\epsilon}^T \tau \, dV = \int_V \overline{U}^T f^B \, dV + \int_{S_f} \overline{U}_{Sf}^T f_{Sf} \, dS + \sum_i \overline{U}_i^T R_{iC}$$

Ecuación 3

En donde $\bar{\epsilon}$ corresponde a las deformaciones virtuales correspondientes a los desplazamientos virtuales $\overline{U}$, y τ corresponde a los esfuerzos en equilibrio con las cargas aplicadas sobre el volumen f^B, sobre una superficie f_{Sf} o concentrada en uno o varios nodos R_{iC}.

Si aplicamos la formulación desarrollada para el método de los elementos finitos, tenemos que:

$$\overline{U}^{(m)} = H^{(m)}\overline{\widehat{U}}$$

$$\bar{\epsilon}^{(m)} = B^{(m)}\overline{\widehat{U}}$$

$$\tau^{(m)} = C^{(m)}\epsilon^{(m)} + \tau^{I(m)}$$

Si reemplazamos las ecuaciones anteriores en la Ecuación 3, y asumiendo que no poseemos esfuerzos iniciales, obtenemos:

$$\bar{\epsilon}^{(m)T}\tau^{(m)} = \left(B^{(m)}\overline{\widehat{U}}\right)^T \left(C^{(m)}\left(B^{(m)}\widehat{U}\right)\right)$$

$$\bar{\epsilon}^{(m)T}\tau^{(m)} = \overline{\widehat{U}}^T B^{(m)^T} C^{(m)} B^{(m)}\widehat{U}$$

$$\bar{u}^{(m)T} f^{B(m)} = \left(H^{(m)}\overline{\widehat{U}}\right)^T f^{B(m)}$$

$$\bar{u}^{(m)T} f^{B(m)} = \overline{\widehat{U}}^T H^{(m)^T} f^{B(m)}$$

Es posible obtener ecuaciones similares para los desplazamientos en la superficie y en cada nodo asociado a las fuerzas puntuales. Luego, tenemos la siguiente ecuación para un solo elemento:

$$\overline{\widehat{U}}^T \left[\int_{V^{(m)}} B^{(m)T} C^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)}\right] \widehat{U} = \overline{\widehat{U}}^T \left[\int_{V^{(m)}} H^{(m)T} f^{B(m)} dV^{(m)} + \int_{S_1{}^{(m)} \ldots S_q{}^{(m)}} H^{S_{(m)}{}^T} f^{S_{(m)}} dS^{(m)} + R_C\right]$$

De la ecuación anterior es posible deducir la ecuación ya conocida para problemas elásticos lineales:

$$\boldsymbol{K\widehat{U} = R}$$

Donde $\boldsymbol{\widehat{U}}$ es el vector de desplazamientos en donde se encuentran, naturalmente, varias incógnitas. Luego:

$$K = \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} C^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)}$$

$$R = R_{Body} + R_{Surface} + R_{Concentradas}$$

Debido a que estamos realizando la deducción para el elemento de nuestro problema, no poseemos fuerzas volumétricas ni superficiales, solo nodales. Así:

$$\left[\int_{V^{(m)}} B^{(m)T} C^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)}\right] \widehat{U} = [R_C]$$

La ecuación anterior es la ecuación utilizada para resolver nuestro problema de elasticidad lineal.

PROBLEMA 2

Se determinarán los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos para el elemento de ocho nodos observado en la Ilustración 1, el cual está sometido a unas fuerzas y para el cual algunos desplazamientos están restringidos. Inicialmente, la ecuación que debemos resolver, para los desplazamientos de todos los nodos, deducida en el Problema 1 es:

$$\boldsymbol{K}.\widehat{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{R}$$

Donde $\boldsymbol{K}$ es la matriz de rigidez que corresponde en este caso a un solo elemento de 8 nodos, $\widehat{\boldsymbol{U}}$ es el vector de desplazamientos nodales con componentes en X e Y, y $\boldsymbol{R}$ es el vector de cargas externas y reacciones que actúan sobre los nodos del elemento, también con componentes en X e Y.

Matriz global de Rigidez

$$\boldsymbol{K^e} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \boldsymbol{B}^{(m)T} \boldsymbol{C}^{(m)} \boldsymbol{B}^{(m)} \det \boldsymbol{J} \, dV^{(m)} = \boldsymbol{K}^{(m)}$$

Como solo poseemos un elemento para los cálculos no debemos realizan una adición de matrices elementales sino integrar sobre un solo elemento, por lo tanto, la expresión para la matriz global de rigidez se reduce a:

$$\boldsymbol{K^e} = \int_{V^{(m)}} \boldsymbol{B}^{(m)T} \boldsymbol{C}^{(m)} \boldsymbol{B}^{(m)} \det \boldsymbol{J} \, drds^{(m)} = \boldsymbol{K}^{(m)}$$

La matriz de deformaciones-desplazamientos se puede expresar como:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial h_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial h_8}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial h_8}{\partial y} & \frac{\partial h_8}{\partial x} \end{bmatrix}$$

La matriz B debe ser conformada a partir de los valores de otras dos matrices, así (ver página 353 de la referencia [1]):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1}. \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial r} & 0 & \dots & \frac{\partial h_8}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial s} & 0 & \dots & \frac{\partial h_8}{\partial s} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & a_{15} & 0 & a_{17} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & a_{25} & 0 & a_{27} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1}. \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial h_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & a_{15} & 0 & a_{17} \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & a_{25} & 0 & a_{27} \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos conformar la matriz de deformaciones-desplazamientos para el elemento de nuestro problema:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & a_{15} & 0 & a_{17} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & a_{25} & 0 & a_{27} \\ a_{21} & a_{11} & a_{23} & a_{13} & a_{25} & a_{15} & a_{27} & a_{17} \end{bmatrix}$$

Luego, para el operador Jacobiano, podemos definir lo siguiente:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial r} & \frac{\partial h_3}{\partial r} & \frac{\partial h_4}{\partial r} & \frac{\partial h_5}{\partial r} & \frac{\partial h_6}{\partial r} & \frac{\partial h_7}{\partial r} & \frac{\partial h_8}{\partial r} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial s} & \frac{\partial h_3}{\partial s} & \frac{\partial h_4}{\partial s} & \frac{\partial h_5}{\partial s} & \frac{\partial h_6}{\partial s} & \frac{\partial h_7}{\partial s} & \frac{\partial h_8}{\partial s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{y}_1 \\ \hat{x}_2 & \hat{y}_2 \\ \hat{x}_3 & \hat{y}_3 \\ \hat{x}_4 & \hat{y}_4 \\ \hat{x}_5 & \hat{y}_5 \\ \hat{x}_6 & \hat{y}_6 \\ \hat{x}_7 & \hat{y}_7 \\ \hat{x}_8 & \hat{y}_8 \end{bmatrix}$$

Esfuerzo Plano

La matriz del material para el caso de esfuerzo plano es:

$$\boldsymbol{C}^{(m)} = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2100000}{0.91} & \frac{630000}{0.91} & 0 \\ \frac{630000}{0.91} & \frac{2100000}{0.91} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{735000}{0.91} \end{bmatrix}$$

Vector de Desplazamientos nodales

El vector de desplazamientos, que contiene todos los grados de libertad del elemento, se define de la siguiente manera:

$$\widehat{\boldsymbol{U}} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad u_5 \quad v_5 \quad u_6 \quad v_6 \quad u_7 \quad v_7 \quad u_8 \quad v_8]^{\boldsymbol{T}}$$

Donde u y v son las componentes del desplazamiento de cada nodo en las coordenadas cartesianas X e Y. Debido a las restricciones para los desplazamientos observadas en la Ilustración 1, podemos asignar algunos valores conocidos a componentes de desplazamiento del vector $\widehat{\boldsymbol{U}}$, así:

$$\widehat{\boldsymbol{U}} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad u_5 \quad v_5 \quad u_6 \quad v_6 \quad 0 \quad 0 \quad u_8 \quad v_8]^{\boldsymbol{T}}$$

Así, expresamos que los nodos 7 y 4, de acuerdo a la convención otorgada por la Ilustración 2, están restringidos por completo para el desplazamiento en X e Y, mientras que el nodo 3 solo está restringido en la dirección de Y, pero puede moverse libremente a lo largo del eje X.

Vector de Fuerzas o Cargas externas

La Ilustración 1 indica los vectores de fuerza nodales que actúan sobre nuestro cuerpo, representado por un elemento de 8 nodos:

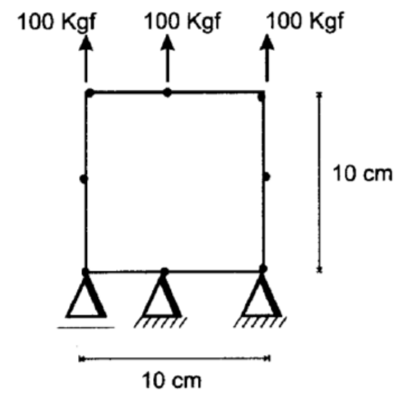

Ilustración 1

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_B} + \boldsymbol{R_S} + \boldsymbol{R_C}$$

Dado que el vector de cargas no posee fuerzas aplicadas al volumen ni fuerzas aplicadas sobre una superficie, solo se tendrán en cuenta las fuerzas concentradas en los nodos, $\boldsymbol{R_C}$, indicadas en la Ilustración 1.

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_C} = [0 \quad 100 \quad 0 \quad 100 \quad 0 \quad R_{y3} \quad R_{x4} \quad R_{y4} \quad 0 \quad 100 \quad 0 \quad 0 \quad R_{x7} \quad R_{y7} \quad 0 \quad 0]^{\boldsymbol{T}}$$

Las fuerzas o reacciones desconocidas serán calculadas luego de hallar los desplazamientos desconocidos.

Cálculo de las Deformaciones

El cálculo de las deformaciones para el caso de esfuerzo plano se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{B}.\boldsymbol{\widehat{U}} = [\boldsymbol{\epsilon_{xx}} \quad \boldsymbol{\epsilon_{yy}} \quad \boldsymbol{\gamma_{xy}}]^{\boldsymbol{T}}$$

Donde:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Cálculo de los esfuerzos

El cálculo de los esfuerzos cumple con la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C\epsilon} + \boldsymbol{\sigma^I}$$

Dado que estamos asumiendo que no existen esfuerzos iniciales (no están mencionados en el problema), la ecuación para el cálculo de los esfuerzos es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C\epsilon} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}]^T$$

Funciones de forma

Se empleará la Ilustración 2 para indicar la convención para la numeración de los nodos del elemento. Dado que el elemento propuesto por el Problema 2 es de ocho nodos, se hará caso omiso al nodo 9 que muestra la figura.

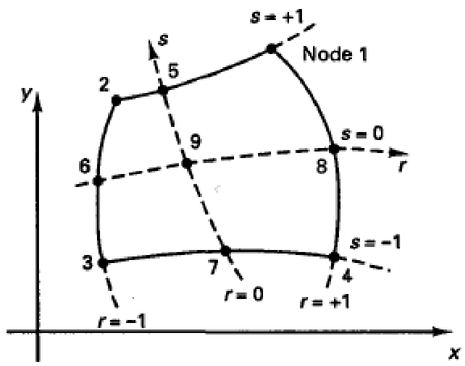

Ilustración 2. Convención para numeración de nodos locales.

Para h_1	**Para h_2**
$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) - \frac{1}{2}h_5 - \frac{1}{2}h_8$ $\frac{\partial h_1}{\partial r} = \frac{1}{4}(1+s)(2r+s)$ $\frac{\partial h_1}{\partial s} = \frac{1}{4}(1+r)(2s+r)$	$h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) - \frac{1}{2}h_5 - \frac{1}{2}h_6$ $\frac{\partial h_2}{\partial r} = \frac{1}{4}(1+s)(2r-s)$ $\frac{\partial h_2}{\partial s} = \frac{1}{4}(1-r)(2s-r)$
Para h_3	**Para h_4**
$h_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) - \frac{1}{2}h_6 - \frac{1}{2}h_7$ $\frac{\partial h_3}{\partial r} = \frac{1}{4}(1-s)(2r+s)$ $\frac{\partial h_3}{\partial s} = \frac{1}{4}(1-r)(2s+r)$	$h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) - \frac{1}{2}h_7 - \frac{1}{2}h_8$ $\frac{\partial h_4}{\partial r} = \frac{1}{4}(1-s)(2r-s)$ $\frac{\partial h_4}{\partial s} = \frac{1}{4}(1+r)(2s-r)$
Para h_5	**Para h_6**
$h_5 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s)$ $\frac{\partial h_5}{\partial r} = -r(1+s)$ $\frac{\partial h_5}{\partial s} = \frac{1}{2}(1-r^2)$	$h_6 = \frac{1}{2}(1-s^2)(1-r)$ $\frac{\partial h_6}{\partial r} = \frac{1}{2}(s^2-1)$ $\frac{\partial h_6}{\partial s} = s(r-1)$
Para h_7	**Para h_8**
$h_7 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s)$	$h_8 = \frac{1}{2}(1-s^2)(1+r)$

$\frac{\partial h_7}{\partial r} = r(s-1)$ $\frac{\partial h_7}{\partial s} = \frac{1}{2}(r^2-1)$	$\frac{\partial h_8}{\partial r} = \frac{1}{2}(1-s^2)$ $\frac{\partial h_8}{\partial s} = -s(1+r)$

Resultados

Todos los resultados fueron determinados a partir de un programa desarrollado bajo el entorno de Matlab en su versión 7.6 (R2008a). El programa está incluido en los anexos de este trabajo. A continuación se presentan los resultados de los cálculos en forma resumida.

- Desplazamientos

Los resultados para los desplazamientos son:

$$\widehat{\boldsymbol{U}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ 0 \\ 0 \\ u_8 \\ v_8 \end{bmatrix} = 1.0e-3 \begin{bmatrix} -0.0614 \\ 0.2004 \\ 0.0684 \\ 0.2040 \\ 0.0114 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0062 \\ 0.1114 \\ 0.0156 \\ 0.0987 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0073 \\ 0.0946 \end{bmatrix} = [cm]$$

- Deformaciones

Los resultados son:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = 1.0e-4 \begin{bmatrix} -0.1028 \\ 0.1810 \\ 0.1449 \end{bmatrix} = [cm/cm]$$

- Esfuerzos

Los resultados son:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11.1885 \\ 34.6613 \\ 11.7019 \end{bmatrix} = [kg/cm^2]$$

Comprobación de resultados

Comprobaremos los resultados realizando una sumatoria de fuerzas y momentos al cuerpo, de tal forma que se cumpla lo siguiente:

$$\sum fuerzas = \sum momentos = 0$$

Donde la sumatoria de fuerzas en los ejes coordenados X e Y en forma independiente deben ser iguales a cero y la sumatoria de momentos, obedeciendo a la regla de la mano derecha, deben ser iguales a cero. En otras palabras, el cuerpo estaría en equilibrio estático de cumplir con estas dos ecuaciones.

$$Equilibrio\ de\ fuerzas\ en\ X = -6.8878e - 14\ kgf$$

$$Equilibrio\ de\ fuerzas\ en\ Y = 1.7053e - 13\ kgf$$

$$Equilibrio\ de\ momentos = 1.5277e - 12\ kgf.cm$$

PROBLEMA 3

Se solucionará Problema 2 teniendo en cuenta que la dirección de la componente en Y de la fuerza aplicada al nodo 1 está orientada en sentido negativo, tal como se observa en la Ilustración 3.

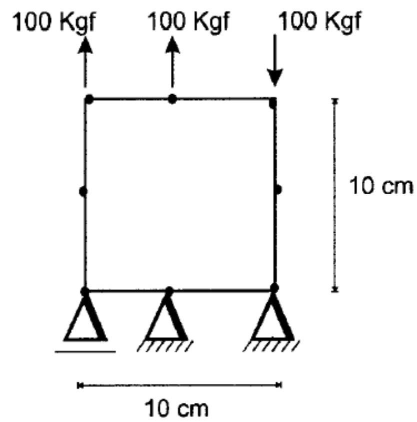

Ilustración 3

Resultados

Todos los resultados fueron determinados a partir de un programa desarrollado bajo el entorno de Matlab en su versión 7.6 (R2008a). El programa está incluido en los anexos de este trabajo. A continuación se presentan los resultados de los cálculos en forma resumida.

- Desplazamientos

En el vector de la izquierda se observan determinados solo aquellos desplazamientos que son conocidos debido a que pertenecen a restricciones en uno o ambos grados de libertad de movimiento. Los resultados para los desplazamientos son:

$$\widehat{\boldsymbol{U}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ 0 \\ 0 \\ u_8 \\ v_8 \end{bmatrix} = 1.0e-3 \begin{bmatrix} 0.3115 \\ -0.2562 \\ 0.2972 \\ 0.3124 \\ 0.0338 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2808 \\ 0.0588 \\ 0.1002 \\ 0.1570 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0789 \\ -0.1254 \end{bmatrix} = [cm]$$

- Deformaciones

Los resultados son:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = 1.0e-4 \begin{bmatrix} 0.0749 \\ -0.1876 \\ -0.0507 \end{bmatrix} = [cm/cm]$$

- Esfuerzos

Los resultados son:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.2874 \\ -38.1167 \\ -4.0939 \end{bmatrix} = [kg/cm^2]$$

Comprobación de resultados

Luego de realizar las sumatorias de fuerzas y momentos se puede comprobar, tal como se desarrolló para el Problema 2, que las ecuaciones de equilibrio se cumplen de forma muy aproximada.

$$Equilibrio\ de\ fuerzas\ en\ X = -1.0653e-13\ kgf$$

$$Equilibrio\ de\ fuerzas\ en\ Y = 3.0553e-13\ kgf$$

$$Equilibrio\ de\ momentos = 1.9185e-12\ kgf.cm$$

ANEXO

CÓDIGO COMPLETO PERTENECIENTE A PROBLEMAS 2 Y 3

```
%TRABAJO PRÁCTICO 4
%IMEF

clear all
clc

%Puntos de Gauss y pesos para evaluar

puntogauss=[-0.774596669241483 ...
    0 0.774596669241483];

peso=[0.555555555555556 ...
    0.888888888888889 ...
    0.555555555555556];

%Matriz de Coordenadas de los nodos

coord=[5 5;-5 5;-5 -5;5 -5;0 5;-5 0;0 -5;5 0];

K=zeros(16,16);

%Defino la matriz del material

E=2.1e6; %Módulo de Elasticidad
v=0.3; %Coef. de Poisson

a=E/(1-v^2);
b=(1-v)/2;

C=[a a*v 0;a*v a 0;0 0 a*b]

C =

  1.0e+006 *

    2.3077    0.6923         0
    0.6923    2.3077         0
         0         0    0.8077

%Cálculo de la matriz de rigidez (8x8)

for j=1:3 %Barre puntos de Gauss sobre s
    for i=1:3 %Barre puntos de Gauss sobre r

        r=puntogauss(i);
        s=puntogauss(j);
        alfa_r=peso(i); %Peso de acuerdo a coordenada en r
        alfa_s=peso(j); %Peso de acuerdo a coordenada en s

        dh1dr=(1/4)*(1+s)*(2*r+s); %Derivadas parciales de f. de forma
        dh1ds=(1/4)*(1+r)*(2*s+r);
```

```
dh2dr=(1/4)*(1+s)*(2*r-s);
dh2ds=(1/4)*(1-r)*(2*s-r);

dh3dr=(1/4)*(1-s)*(2*r+s);
dh3ds=(1/4)*(1-r)*(2*s+r);

dh4dr=(1/4)*(1-s)*(2*r-s);
dh4ds=(1/4)*(1+r)*(2*s-r);

dh5dr=-r*(1+s);
dh5ds=(1/2)*(1-r^2);

dh6dr=(1/2)*(s^2-1);
dh6ds=s*(r-1);

dh7dr=r*(s-1);
dh7ds=(1/2)*(r^2-1);

dh8dr=(1/2)*(1-s^2);
dh8ds=-s*(1+r);

matrizdhdr=[dh1dr dh2dr dh3dr dh4dr... %Matriz de derivadas
    dh5dr dh6dr dh7dr dh8dr; dh1ds...
    dh2ds dh3ds dh4ds dh5ds dh6ds...
    dh7ds dh8ds];

%Operador Jacobiano

J=matrizdhdr*coord;

%Matriz de Esfuerzos-Deformaciones

Baux_u=inv(J)*[dh1dr 0 dh2dr 0 ...
    dh3dr 0 dh4dr 0 dh5dr 0 dh6dr 0 ...
    dh7dr 0 dh8dr 0;dh1ds 0 dh2ds 0 ...
    dh3ds 0 dh4ds 0 dh5ds 0 dh6ds 0 ...
    dh7ds 0 dh8ds 0];

Baux_v=inv(J)*[0 dh1dr 0 dh2dr 0 ...
    dh3dr 0 dh4dr 0 dh5dr 0 dh6dr 0 ...
    dh7dr 0 dh8dr;0 dh1ds 0 dh2ds 0 ...
    dh3ds 0 dh4ds 0 dh5ds 0 dh6ds 0 ...
    dh7ds 0 dh8ds];

B=[Baux_u(1,:);Baux_v(2,:);...
    Baux_u(2,1) Baux_u(1,1) Baux_u(2,3) ...
    Baux_u(1,3) Baux_u(2,5) Baux_u(1,5) ...
    Baux_u(2,7) Baux_u(1,7) Baux_u(2,9) ...
    Baux_u(1,9) Baux_u(2,11) Baux_u(1,11) ...
    Baux_u(2,13) Baux_u(1,13) Baux_u(2,15) ...
    Baux_u(1,15)];

%Integración Numérica

F=B'*C*B*det(J);
aporte_p_gauss=alfa_s*alfa_r*F;

%Ensamble de matriz de rigidez
```

```
        K=K+aporte_p_gauss;
    end
end

K

K =

  1.0e+006 *

  Columns 1 through 11

    1.8000    0.7083    0.8705    0.0096    0.7962    0.2917    0.6872   -0.0096
-1.9974   -0.3718   -0.5128
    0.7083    1.8000   -0.0096    0.6872    0.2917    0.7962    0.0096    0.8705
-0.2949   -0.5641   -0.1667
    0.8705   -0.0096    1.8000   -0.7083    0.6872    0.0096    0.7962   -0.2917
-1.9974    0.3718   -0.5641
    0.0096    0.6872   -0.7083    1.8000   -0.0096    0.8705   -0.2917    0.7962
0.2949   -0.5641    0.3718
    0.7962    0.2917    0.6872   -0.0096    1.8000    0.7083    0.8705    0.0096
-1.0795   -0.1667   -0.5641
    0.2917    0.7962    0.0096    0.8705    0.7083    1.8000   -0.0096    0.6872
-0.1667   -0.5128   -0.3718
    0.6872    0.0096    0.7962   -0.2917    0.8705   -0.0096    1.8000   -0.7083
-1.0795    0.1667   -0.5128
   -0.0096    0.8705   -0.2917    0.7962    0.0096    0.6872   -0.7083    1.8000
0.1667   -0.5128    0.1667
   -1.9974   -0.2949   -1.9974    0.2949   -1.0795   -0.1667   -1.0795    0.1667
4.5333    0.0000   -0.0000
   -0.3718   -0.5641    0.3718   -0.5641   -0.1667   -0.5128    0.1667   -0.5128
0.0000    2.6667   -0.6667
   -0.5128   -0.1667   -0.5641    0.3718   -0.5641   -0.3718   -0.5128    0.1667
-0.0000   -0.6667    2.6667
   -0.1667   -1.0795    0.2949   -1.9974   -0.2949   -1.9974    0.1667   -1.0795
-0.6667   -0.0000   -0.0000
   -1.0795   -0.1667   -1.0795    0.1667   -1.9974   -0.2949   -1.9974    0.2949
1.6205         0   -0.0000
   -0.1667   -0.5128    0.1667   -0.5128   -0.3718   -0.5641    0.3718   -0.5641
0.0000   -0.5128    0.6667
   -0.5641   -0.3718   -0.5128    0.1667   -0.5128   -0.1667   -0.5641    0.3718
-0.0000    0.6667   -0.5128
   -0.2949   -1.9974    0.1667   -1.0795   -0.1667   -1.0795    0.2949   -1.9974
0.6667   -0.0000   -0.0000

  Columns 12 through 16

   -0.1667   -1.0795   -0.1667   -0.5641   -0.2949
   -1.0795   -0.1667   -0.5128   -0.3718   -1.9974
    0.2949   -1.0795    0.1667   -0.5128    0.1667
   -1.9974    0.1667   -0.5128    0.1667   -1.0795
   -0.2949   -1.9974   -0.3718   -0.5128   -0.1667
   -1.9974   -0.2949   -0.5641   -0.1667   -1.0795
    0.1667   -1.9974    0.3718   -0.5641    0.2949
   -1.0795    0.2949   -0.5641    0.3718   -1.9974
   -0.6667    1.6205    0.0000   -0.0000    0.6667
   -0.0000         0   -0.5128    0.6667   -0.0000
   -0.0000   -0.0000    0.6667   -0.5128   -0.0000
    4.5333    0.6667   -0.0000   -0.0000    1.6205
    0.6667    4.5333   -0.0000   -0.0000   -0.6667
```

```
   -0.0000   -0.0000    2.6667   -0.6667   -0.0000
   -0.0000   -0.0000   -0.6667    2.6667   -0.0000
    1.6205   -0.6667   -0.0000   -0.0000    4.5333

%Creo una matriz K auxiliar para resolver los desplazamientos
%Esta matriz se crea eliminando filas y columnas cuyo u=0
%de la matriz K

aux_u=[1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 1]'; %Vector aux. desplaz.
aux_K=zeros(sum(aux_u),sum(aux_u)); %Matriz K para cálculo de desplaz.
ngl=length(K(:,1)); %Número total de grados de libertad
cont_filas=0;
cont_cols=0;

%Ciclo para llenar matriz K auxiliar

for j=1:ngl
    if aux_u(j)==1
        cont_cols=cont_cols+1;
        for i=1:ngl
            if aux_u(i)==1
                cont_filas=cont_filas+1;
                aux_K(cont_filas,cont_cols)...
                    =aux_K(cont_filas,cont_cols)+K(i,j);
            end
        end
        cont_filas=0;
    end
end

aux_K

aux_K =

  1.0e+006 *

    1.8000    0.7083    0.8705    0.0096    0.7962   -1.9974   -0.3718   -0.5128
-0.1667   -0.5641   -0.2949
    0.7083    1.8000   -0.0096    0.6872    0.2917   -0.2949   -0.5641   -0.1667
-1.0795   -0.3718   -1.9974
    0.8705   -0.0096    1.8000   -0.7083    0.6872   -1.9974    0.3718   -0.5641
0.2949   -0.5128    0.1667
    0.0096    0.6872   -0.7083    1.8000   -0.0096    0.2949   -0.5641    0.3718
-1.9974    0.1667   -1.0795
    0.7962    0.2917    0.6872   -0.0096    1.8000   -1.0795   -0.1667   -0.5641
-0.2949   -0.5128   -0.1667
   -1.9974   -0.2949   -1.9974    0.2949   -1.0795    4.5333    0.0000   -0.0000
-0.6667   -0.0000    0.6667
   -0.3718   -0.5641    0.3718   -0.5641   -0.1667    0.0000    2.6667   -0.6667
-0.0000    0.6667   -0.0000
   -0.5128   -0.1667   -0.5641    0.3718   -0.5641   -0.0000   -0.6667    2.6667
-0.0000   -0.5128   -0.0000
   -0.1667   -1.0795    0.2949   -1.9974   -0.2949   -0.6667   -0.0000   -0.0000
4.5333   -0.0000    1.6205
   -0.5641   -0.3718   -0.5128    0.1667   -0.5128   -0.0000    0.6667   -0.5128
-0.0000    2.6667   -0.0000
   -0.2949   -1.9974    0.1667   -1.0795   -0.1667    0.6667   -0.0000   -0.0000
1.6205   -0.0000    4.5333

%Defino el vector aux_F
```

```
aux_F=[0 -100 0 100 0 0 100 0 0 0 0]';

%Resuelvo para los desplazamientos desconocidos

desp=aux_K\aux_F

desp =

  1.0e-003 *

    0.3115
   -0.2562
    0.2972
    0.3124
    0.0338
    0.2808
    0.0588
    0.1002
    0.1570
    0.0789
   -0.1254

%Preparo el vector U con todas las deformaciones

U=zeros(ngl,1);
cont_filas_desp=0;

%Ciclo para llenado del vector U con todos los desplazamientos

for i=1:ngl
    if aux_u(i)==1
        cont_filas_desp=cont_filas_desp+1;
        U(i)=desp(cont_filas_desp);
    end
end

U

U =

  1.0e-003 *

    0.3115
   -0.2562
    0.2972
    0.3124
    0.0338
         0
         0
         0
    0.2808
    0.0588
    0.1002
    0.1570
         0
         0
    0.0789
   -0.1254
```

```
%Cálculo de Deformaciones

epsilon=B*U

epsilon =

  1.0e-004 *

    0.0749
   -0.1876
   -0.0507

%Cálculo de Esfuerzos

sigma=C*épsilon

sigma =

    4.2874
  -38.1167
   -4.0939

%Compruebo equilibrio de fuerzas=0

suma_x=0;

for i=1:2:ngl
    suma_x=suma_x+f(i); %Debe ser aproximadamente igual a cero
end

suma_x

suma_x =

 -1.0653e-013

suma_y=0;

for i=2:2:ngl
    suma_y=suma_y+f(i); %Debe ser aproximadamente igual a cero
end

suma_y

suma_y =

  3.0553e-013

%Compruebo equilibrio de momentos=0

suma_mom1=5*(abs(f(2))-abs(f(4))+abs(f(6))...
    +abs(f(7))-abs(f(8))-abs(f(13)));
suma_mom2=5*(-abs(f(2))-abs(f(4))+abs(f(6))...
    -abs(f(7))+abs(f(8))+abs(f(13)));

%FIN DEL PROGRAMA
```

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BATHE, Klaus-Jurgen. Finite Element Procedures. Prentice-Hall. 1996. PP 160.