

INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

TRABAJO PRÁCTICO 5 (CORREGIDO)

PROBLEMA TÉRMICO TRANSITORIO UNIDIMENSIONAL

Estudiante

FREDY ANDRÉS MERCADO NAVARRO

Pasaporte: 98'773.532

Maestría en Simulación Numérica y Control

Cuatrimestre: II-2011

07 de Marzo



Universidad de Buenos Aires
Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Argentina
2012

CORRECCIONES REALIZADAS

Las anotaciones de parte del profesor Adan Levy al trabajo y algunos comentarios relacionados son:

Del tp 5,

- 1) En la ilustración 3 tenés mal graficada la solución analítica... no da oscilatoria.

Profesor, revisé la solución analítica. Si no estoy mal la solución da oscilatoria si utilizo muy pocas iteraciones para la sumatoria. La que se encuentra en la ilustración 3 la hallé con solo 5 iteraciones. Debí haberla graficado con más. Adicioné un Anexo para ilustrar esto mejor. Espero no estar equivocado.

- 2) En las conclusiones decís que Cranck Nicholson no es incondicionalmente estable y eso está mal. Es incondicionalmente estable.

Es cierto. Debo decirle que cometí un error, ya que entregué una versión del trabajo equivocada. Después de revisarlo la primera vez en mi casa me di cuenta de eso y lo modifiqué, pero terminé imprimiendo el equivocado. Le ruego revisar de nuevo las conclusiones, ya que ésta versión si tiene las correctas.

- 3) Una cosa es que diverja y otra cosa que llegue a la solución a través de oscilaciones.

Este tp tiene un 8.

PROBLEMA 1

Se adimensionalizará la ecuación diferencial que gobierna el problema y se elaborará un programa de elementos finitos para resolverla. La ecuación es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \quad \text{y } t > 0$$

Ecuación 1

Condiciones de borde:

$$T_{(L,t)} = T_L \quad \text{y} \quad \eta \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(0,t)} = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$

Condiciones iniciales:

$$T_{(x,0)} = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L$$

Ahora, se adimensionalizará la ecuación diferencial utilizando las expresiones propuestas por el enunciado del problema:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{L}, & \theta &= 1 - \frac{T}{T_L}, & \tau &= \frac{t\eta}{L^2} \\ x &= yL, & T &= (1 - \theta)T_L, & t &= \frac{\tau L^2}{\eta} \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial[(1 - \theta)T_L]}{\partial \tau} = -\frac{T_L \eta}{L^2} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \\ \eta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \eta \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial[(1 - \theta)T_L]}{\partial y} \right] = -\frac{\eta T_L}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} \right] = -\frac{\eta T_L}{L} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} \right] = -\frac{\eta T_L}{L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \end{aligned}$$

La Ecuación 1 quedaría entonces como:

$$\begin{aligned} -\frac{T_L \eta}{L^2} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= -\frac{\eta T_L}{L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad \text{para } 0 \leq y \leq 1, \quad \tau \geq 0 \end{aligned}$$

Ecuación 2

Condiciones de borde:

$$T_{(L,t)} = T_L \quad \text{y} \quad \eta \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(0,t)} = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$

$$T = (1 - \theta)T_L = T_L \rightarrow \theta_{1,t} = 0$$

$$\eta \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(0,t)} = 0 \rightarrow \eta \frac{\partial[(1-\theta)T_L]}{\partial(yL)} \Big|_{(0,t)} = 0 \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{(0,t)} = 0$$

Condiciones iniciales:

$$T_{(x,0)} = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq L$$

$$T_{(x,0)} = (1-\theta)T_L = 0 \rightarrow \theta_{(y,0)} = 1 \quad \text{para} \quad 0 \leq y \leq 1$$

La deducción de la ecuación que se debe resolver está detallada en el Apunte para el problema térmico transitorio visto en el curso. Se planteará la ecuación directamente:

$$\left(\frac{C}{\Delta t} + K \cdot \alpha \right) t + \Delta t \hat{\theta} = \left(\frac{C}{\Delta t} - K(1-\alpha) \right) t \hat{\theta}$$

Ecuación 3

Donde:

$$C = \int_{\Omega} H^T H d\Omega$$

$$K = \int_{\Omega} \nabla H^T \nabla H d\Omega$$

Para calcular las matrices C y K definimos las funciones de forma para un elemento isoparamétrico de 2 nodos como:

$$h_1 = \frac{1-r}{2}, \quad h_2 = \frac{1+r}{2}$$

Es necesario definir también las matrices H y ∇H , así:

$$H = [h_1 \quad h_2], \quad H^T = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla H = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \nabla H^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Donde, por la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{\partial h_i}{\partial y} = \frac{\partial h_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y}$$

Ecuación 4

A continuación hallamos los términos para resolver la Ecuación 4.

$$\frac{\partial h_1}{\partial r} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial h_2}{\partial r} = \frac{1}{2}$$

$$y = h_1 y_1 + h_2 y_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial h_1}{\partial r} y_1 + \frac{\partial h_2}{\partial r} y_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 = \frac{1}{2} (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} \Delta y \rightarrow \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2}{\Delta y}$$

Ecuación 5

Luego, de la Ecuación 4:

$$\frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{\partial h_1}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{2}{\Delta y} = -\frac{1}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial y} = \frac{\partial h_2}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{2}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial y} = J \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

De la Ecuación 5 habíamos obtenido que:

$$J = \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\Delta y}{2}$$

Cálculo de Matriz Capacitiva Elemental

El siguiente desarrollo aplica para cada elemento en forma individual. La matriz Capacitiva Global estará conformada por los aportes de las matrices Capacitivas de cada elemento.

$$\begin{aligned} C_e &= \int_{\Omega} H^T H d\Omega = \int_{-1}^1 H^T H J dr = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} [h_1 \quad h_2] J dr = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} h_1^2 & h_1 h_2 \\ h_2 h_1 & h_2^2 \end{bmatrix} J dr \\ C_e &= \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-2r+r^2) & \frac{1}{4}(1-r^2) \\ \frac{1}{4}(1-r^2) & \frac{1}{4}(1+2r+r^2) \end{bmatrix} \frac{\Delta y}{2} dr \\ C_e &= \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (1-2r+r^2) & (1-r^2) \\ (1-r^2) & (1+2r+r^2) \end{bmatrix} \frac{\Delta y}{(4)(2)} dr \\ C_e &= \frac{\Delta y}{8} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} F_{C11}(r) & F_{C12}(r) \\ F_{C21}(r) & F_{C22}(r) \end{bmatrix} dr \\ C_e &= \frac{\Delta y}{8} \begin{bmatrix} int_{C11}(r) & int_{C12}(r) \\ int_{C21}(r) & int_{C22}(r) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$C_e = \begin{bmatrix} C(1,1) & C(1,2) \\ C(2,1) & C(2,2) \end{bmatrix}$$

Cálculo de Matriz Conductiva Elemental

El siguiente desarrollo aplica para cada elemento en forma individual. La matriz Conductiva Global estará conformada por los aportes de las matrices Conductivas de cada elemento.

$$\begin{aligned}
 K_e &= \int_{\Omega} \nabla H^T \nabla H d\Omega = \int_{-1}^1 \nabla H^T \nabla H J dr = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{bmatrix} J dr = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)^2 & \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial h_2}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial h_2}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial h_2}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix} J dr \\
 K_e &= \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta y^2} & -\frac{1}{\Delta y^2} \\ -\frac{1}{\Delta y^2} & \frac{1}{\Delta y^2} \end{bmatrix} \frac{\Delta y}{2} dr \\
 K_e &= \frac{1}{2\Delta y} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dr \\
 K_e &= \frac{1}{2\Delta y} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} F_{K11}(r) & F_{K12}(r) \\ F_{K21}(r) & F_{K22}(r) \end{bmatrix} J dr \\
 K_e &= \frac{1}{2\Delta y} \begin{bmatrix} int_{K11}(r) & int_{K12}(r) \\ int_{K21}(r) & int_{K22}(r) \end{bmatrix} \\
 K_e &= \begin{bmatrix} K(1,1) & K(1,2) \\ K(2,1) & K(2,2) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Aplicación del Método Alpha (α)

De la Ecuación 3 tenemos:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\underline{C}}{\Delta t} + \underline{K} \cdot \alpha \right)^{t+\Delta t} \underline{\theta} &= \left(\frac{\underline{C}}{\Delta t} - \underline{K} (1 - \alpha) \right)^t \underline{\theta} \\
 \left(\frac{1}{\Delta t} C[11x11] + \alpha K[11x11] \right)^{t+\Delta t} \theta[11x1] &= \left(\frac{1}{\Delta t} C[11x11] - (1 - \alpha) K[11x11] \right)^t \theta[11x1] \\
 A &= \left(\frac{1}{\Delta t} C[11x11] + \alpha K[11x11] \right) \\
 B &= \left(\frac{1}{\Delta t} C[11x11] - (1 - \alpha) K[11x11] \right) \\
 b &= B^t \theta[11x1] \\
 A^{t+\Delta t} \theta &= b
 \end{aligned}$$

$${}^{t+\Delta t}\theta = A \setminus b$$

Habiendo llegado a este punto se requiere utilizar el resultado en el tiempo t para hallar la solución en el tiempo $t+\Delta t$. Este proceso iterativo se efectuará mediante el código elaborado en Matlab®, versión R2008a.

Acerca del Método α

Para $0 \leq \alpha < 1/2$, la formulación es condicionalmente estable, mientras que para $1/2 \leq \alpha \leq 1$, el método es incondicionalmente estable. Para $\alpha = 0$, la formulación corresponde al método explícito de Euler en adelanto (Euler Forward), el cual es de primer orden de precisión en Δt , y $\alpha = 1/2$, corresponde al método implícito de Crank-Nicolson, el cual posee orden de precisión 2 en Δt . Para $\alpha = 1$ corresponde el método de Euler en atraso (Euler Backward), que al igual que Euler en Adelanto, posee precisión de primer orden.

Integración Numérica – Método del Trapecio

La integración por el método del trapecio equivale a la integración de Newton-Cotes con $n = 1$, donde n es el número de intervalos en que será dividido el dominio para la integración. La metodología se resume como:

$$\int F(r)dr = \sum_i \alpha_i F(r_i)$$

Donde α_i son coeficientes o pesos que acompañan a cada evaluación de la función en un punto r_i .

$$\int_a^b F(r)dr = (b-a) \sum_{i=0}^n C_i^n F_i$$

Donde C_i^n son las constantes para la integración numérica con n intervalos y F_i es la función a integrar evaluada en el i -ésimo punto. En este caso, $n = 1$, $a = -1$ y $b = 1$, entonces:

$$\int_a^b F(r)dr = (b-a) \sum_{i=0}^1 C_i^n F_i = (b-a)(C_0^n F_0 + C_1^n F_1)$$

De la tabla 5.5 de la referencia [1] se extrajeron las constantes, así:

$$C_0^n = \frac{1}{2}, \quad C_1^n = \frac{1}{2}$$

Luego:

$$\int_{-1}^1 F(r)dr = (1 - (-1)) \left(\frac{1}{2} F(-1) + \frac{1}{2} F(1) \right)$$

Finalmente, la integración por el método del trapecio concluye como:

$$\int_{-1}^1 F(r)dr = F(-1) + F(1)$$

Luego, al sumar cada función evaluada en -1 y 1, obtenemos la integración numérica deseada.

Programa de Elementos Finitos

El siguiente es el programa desarrollado para calcular las soluciones del problema térmico transitorio unidimensional. Fue creado en Matlab[®] en su versión R2008a.

```
%INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS
%Problema térmico transitorio.
%Freddy Andrés Mercado Navarro.
%Pasaporte 98'773.532.

clear all
clc

deltay=0.1; %Adimensional 0<=y<=1
deltatau=0.00005; %Adimensional tau>0
taufinal=0.5; %Delimita la ultima iteración

npasos=taufinal/deltatau; %Cantidad de pasos de tiempo
nelementos=1/deltay; %y=1 (la PDE fue adimensionalizada).
nnodos=nelementos+1; %Número total de nodos
y=[0:deltay:1]'; %Discretización del dominio
datos=zeros(nnodos,5); %Tabla de datos
datos(:,1)=y;
theta_a=zeros(nnodos,1);
C=zeros(nnodos,nnodos);
K=zeros(nnodos,nnodos);

%Integración - Método Trapecio
%Para 1 intervalo Integral_a^b[F(r) dr]=F(a)+F(b)
%a=-1 y b=1

intc11=0;
intc21=0;
intc12=0;
intc22=0;

intk11=0;
intk21=0;
intk12=0;
intk22=0;

for r=-1:2:1

    %Dentro de los paréntesis están las F(r)

    intc11=intc11+(1-2*r+r^2);
    intc21=intc21+(1-r^2);
    intc12=intc12+(1-r^2);
    intc22=intc22+(1+2*r+r^2);

    intk11=intk11+(1);
    intk21=intk21+(-1);
    intk12=intk12+(-1);
    intk22=intk22+(1);

end

%Matriz de integrales de C
```

```

auxCe=[intc11 intc12;intc21 intc22];
auxKe=[intk11 intk12;intk21 intk22];

%Matrices C y K elementales
Ce=(deltay/8)*auxCe;
Ke=(1/(2*deltay))*auxKe;

%Matriz de conectividad global
%Cada fila de cgl es un elemento
cgl=[1 2;2 3;3 4;4 5;5 6;6 7;7 8;8 9;9 10;10 11];

%Ciclo de conformación de matrices C y K globales
for k=1:nelementos
    for j=1:2
        for i=1:2
            C(cgl(k,i),cgl(k,j))=C(cgl(k,i),cgl(k,j))...
                +Ce(i,j);
            K(cgl(k,i),cgl(k,j))=K(cgl(k,i),cgl(k,j))...
                +Ke(i,j);
        end
    end
end

%Se modifican las matrices A y B
%para introducir la condición inicial
%theta=0 para todo tau en y=1

%MÉTODO ALPHA

%Este ciclo llena una tabla con datos para alpha=0, 0.5 y 1.
for alpha=0:0.5:1

    A=((C/deltatau)+K*alpha);
    A(:,nnodos)=0;
    A(nnodos,:)=0;
    A(nnodos,nnodos)=1;

    B=((C/deltatau)-K*(1-alpha));
    B(:,nnodos)=0;
    B(nnodos,:)=0;
    B(nnodos,nnodos)=1;

    %Definimos vector de temperaturas nodales
    theta=ones(nnodos,1);
    theta(nnodos)=0; %Condición inicial

    for paso=1:npasos
        b=B*theta;
        theta=A\b;
    end

    if alpha==0
        datos(:,2)=theta;
    elseif alpha==0.5
        datos(:,3)=theta;
    elseif alpha==1
        datos(:,4)=theta;
    end
end

```

%SOLUCIÓN ANALÍTICA

```
for j=0:5 %Es suficiente con 5 iteraciones
    theta_a=theta_a+((2*(-1)^j)/((j+0.5)*pi))*exp(-pi^2*(j...
        +0.5)^2*taufinal)*cos(pi*(j+0.5)*y);
end

%Asignamos la solución analítica a la tabla de datos
datos(:,5)=theta_a;

%Gráfica de curvas para Alpha=0, 0.5, 1 y Sol. Analítica
plot(y,datos(:,2),y,datos(:,3),y,datos(:,4),y,datos(:,5)),...
    grid on,title('Problema Térmico Transitorio'), xlabel('y'),...
    ylabel('Theta'),...
    legend('Alpha=0','Alpha=0.5','Alpha=1','Sol.Analítica')
```

PROBLEMA 2

Se resolverá la ecuación utilizando los esquemas explícito ($\alpha = 0$), implícito ($\alpha = 1$) y de Cranck-Nicholson ($\alpha = 0.5$). En todos los casos se utilizará una discretización del espacio de $\delta y = 0.1$.

Caso a)

$\tau = 0.05$ y $\delta\tau = 0.05$ (1 iteración).

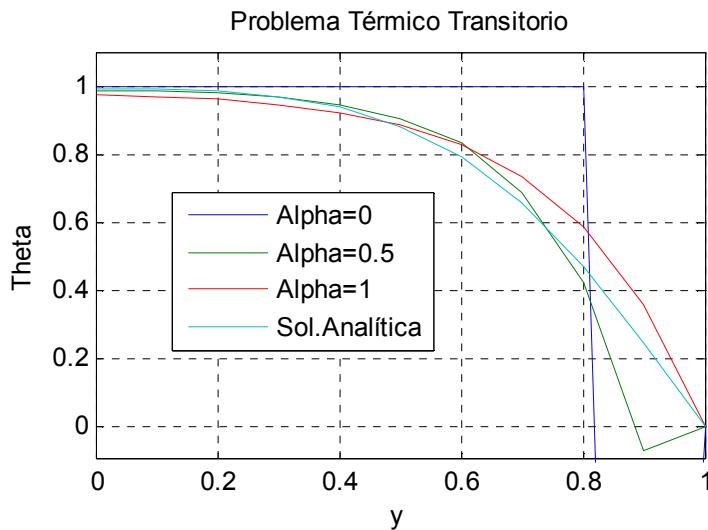


Ilustración 1. Curvas para $\tau = 0.05$ y $\delta\tau = 0.05$ (1 iteración).

En la Ilustración 1 se observa la inestabilidad numérica del esquema explícito ($\alpha = 0$). La razón es la escogencia de una sola iteración para resolver la ecuación y la corta amplitud del intervalo de tiempo entre pasos. Más adelante se observará que un $\delta\tau = 0.05$ aún con una sola iteración, ya otorga resultados mejores que un $\delta\tau = 0.00005$, también para una sola iteración. Ver caso c).

A continuación se presentan los resultados tabulados correspondientes a la Ilustración 1.

Resultados MEF				
$\tau_{final} = 0.05$ y $\delta\tau = 0.05$ (1 iteración)				
y	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	Solución Analítica
0.0	1.000000	0.992072	0.976309	0.996869
0.1	1.000000	0.990486	0.973940	0.995069
0.2	1.000000	0.985095	0.966359	0.988440
0.3	1.000000	0.973742	0.952050	0.973104
0.4	1.000000	0.951886	0.928151	0.942211
0.5	1.000000	0.910783	0.889882	0.886152
0.6	1.000000	0.833995	0.829590	0.794096
0.7	1.000000	0.690804	0.735215	0.657218
0.8	1.000000	0.423935	0.587884	0.472911
0.9	-4.000000	-0.073361	0.358129	0.248170
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	9.8356e-17

Caso b)

$\tau = 0.5$ y $\delta\tau = 0.05$ (10 iteraciones).

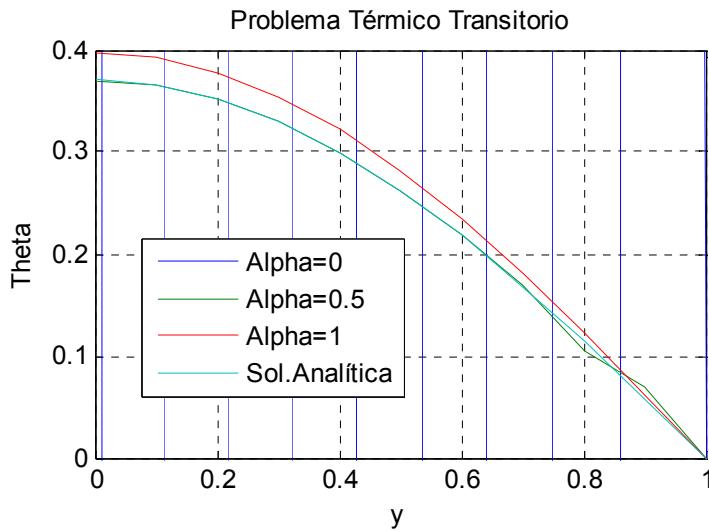


Ilustración 2. Curvas para $\tau = 0.5$ y $\delta\tau = 0.05$ (10 iteraciones).

Las líneas azules que se observan en la Ilustración 2 corresponden a la curva de la solución otorgada por el método explícito con $\alpha = 0$. Esto demuestra que 10 iteraciones no son suficientes para darle estabilidad a este esquema con $\delta\tau = 0.05$. Para ello se requiere seleccionar un intervalo de tiempo menor entre pasos.

A continuación se presentan los resultados para las curvas de la Ilustración 2.

Resultados MEF $\tau_{final} = 0.5$ y $\delta\tau = 0.05$ (10 iteraciones)				
y	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	Solución Analítica
0.0	-19531249	0.370380	0.397632	0.370777
0.1	156250001	0.365847	0.392762	0.366213
0.2	-1.1895e+09	0.352314	0.378266	0.352633
0.3	5.7055e+09	0.329984	0.354485	0.330370
0.4	-1.9236e+10	0.299338	0.321984	0.299972
0.5	4.8075e+10	0.261610	0.281539	0.262188
0.6	-9.1216e+10	0.218924	0.234125	0.217947
0.7	1.3136e+11	0.170491	0.180899	0.168339
0.8	-1.3824e+11	0.104311	0.123168	0.114584
0.9	9.0579e+10	0.069167	0.062363	0.058006
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	2.2705e-17

Caso c)

$\tau = 0.00005$ y $\delta\tau = 0.00005$ (1 iteración).

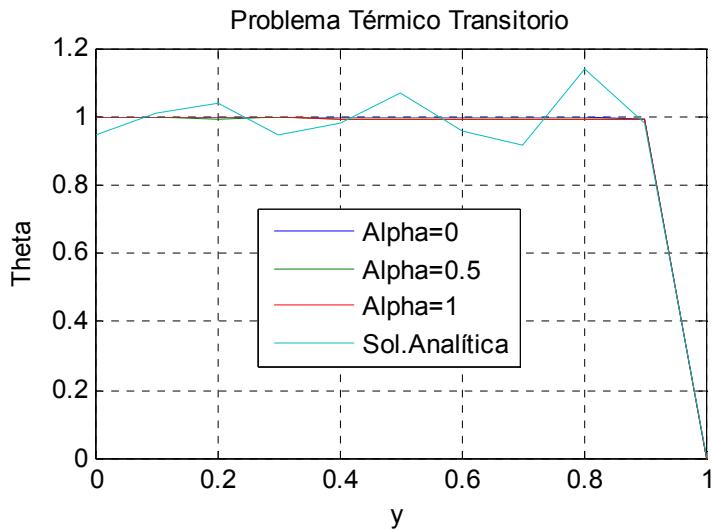


Ilustración 3. Curvas para $\tau = 0.00005$ y $\delta\tau = 0.00005$ (1 iteración).

Si comparamos los casos a) y c), ambos con resultados tras una sola iteración, coincidimos en que, a pesar de que solo transcurrió un paso temporal, ya tenemos resultados que se aproximan de alguna manera a las curvas analíticas.

A continuación se presentan los resultados tabulados correspondientes a las curvas de la Ilustración 3.

Resultados MEF				
$\tau_{final} = 0.00005$ y $\delta\tau = 0.00005$ (1 iteración)				
y	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	Solución Analítica
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	0.948239
0.1	1.000000	1.000000	1.000000	1.016853
0.2	1.000000	1.000000	1.000000	1.043099
0.3	1.000000	1.000000	1.000000	0.951708
0.4	1.000000	1.000000	1.000000	0.984015
0.5	1.000000	1.000000	1.000000	1.072302
0.6	1.000000	1.000000	1.000000	0.964245
0.7	1.000000	1.000000	1.000000	0.921513
0.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.144554
0.9	0.995000	0.995025	0.995049	0.983188
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	6.6761E-16

Caso d)

$\tau = 0.5$ y $\delta\tau = 0.00005$ (10000 iteraciones).

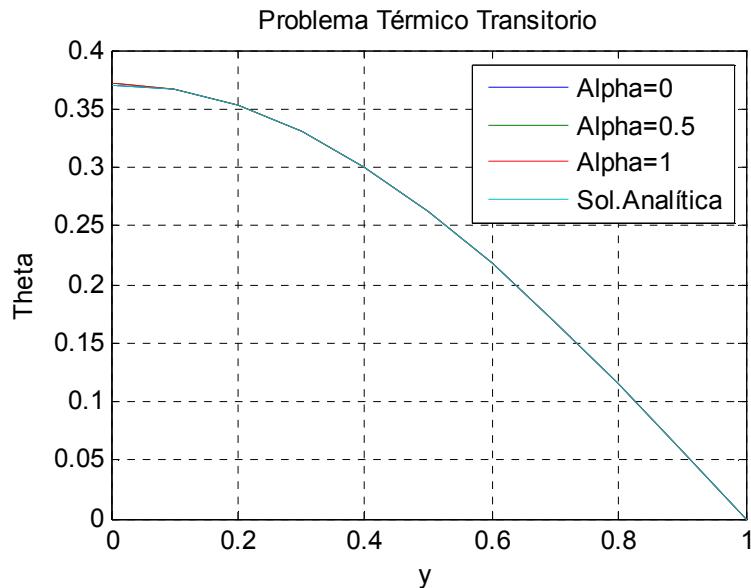


Ilustración 4. Curvas para $\tau = 0.5$ y $\delta\tau = 0.00005$ (10000 iteraciones).

El resultado de la solución con $\delta\tau = 0.00005$ otorgó resultados muy satisfactorios para todos los esquemas de integración en el tiempo. Las soluciones numéricas obtenidas por Elementos Finitos se aproximan mucho a la solución analítica del problema. En la Ilustración 4 solo se aprecia la curva de la solución analítica debido a que las curvas de las soluciones son tan similares que se superponen.

En la tabla siguiente se presentan los resultados tabulados de las soluciones observadas en la Ilustración 4.

Resultados MEF $\tau_{final} = 0.5$ y $\delta\tau = 0.00005$ (10000 iteraciones)				
y	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	Solución Analítica
0.0	0.370924	0.370952	0.370981	0.370777
0.1	0.366358	0.366386	0.366414	0.366213
0.2	0.352773	0.352800	0.352826	0.352633
0.3	0.330502	0.330527	0.330552	0.330370
0.4	0.300093	0.300115	0.300138	0.299972
0.5	0.262294	0.262314	0.262334	0.262188
0.6	0.218036	0.218052	0.218069	0.217947
0.7	0.168407	0.168420	0.168433	0.168339
0.8	0.114630	0.114639	0.114648	0.114584
0.9	0.058030	0.058034	0.058039	0.058006
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	2.2705e-17

CONCLUSIONES

- La estabilidad de los esquemas depende de la escogencia de la amplitud del paso temporal $\delta\tau$. Sea cual sea el momento en el tiempo en el cual se desea obtener una solución, dicha amplitud determina la cantidad de iteraciones que se efectuarán para lograr una solución. En general, mientras más iteraciones se efectúan mejores son los resultados obtenidos en comparación con la solución analítica.
- El esquema explícito $\alpha = 0$ (Euler Forward) es el esquema más inestable de todos debido a su estabilidad condicionada por la escogencia adecuada de δt . Es de orden 1 de precisión. El esquema es estable para aquellas iteraciones con intervalos de tiempo muy pequeños, como en los casos c) y d). Este esquema es inestable para intervalos más grandes. Los casos a) y b) ilustran dicha inestabilidad. Para lograr estabilidad con este esquema se debe cumplir:

$$\Delta t \leq \frac{L_e^2}{2\eta}$$

- El esquema implícito, con $\alpha = 1$ y orden de precisión 1, es el esquema más estable de los tres. Para todos los casos mostró estabilidad, lo que indica que pudimos comprobar que el esquema es incondicionalmente estable. No obstante, en la Ilustración 2 podemos observar que este esquema sacrifica la exactitud de los datos a cambio de estabilidad. La línea roja indica que el cálculo es estable pero algo desviado.
- El esquema implícito de Cranck-Nicholson con $\alpha = 0.5$, es un esquema de orden 2 de precisión. Es incondicionalmente estable, a diferencia de los esquemas Euler Forward y Euler Backward.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

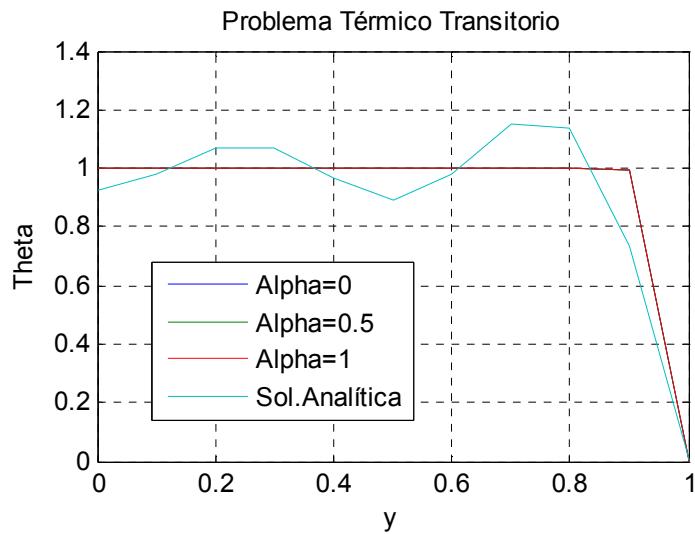
1. BATHE, Klaus-Jurgen. Finite Element Procedures. Prentice-Hall. 1996. PP 160.

ANEXO

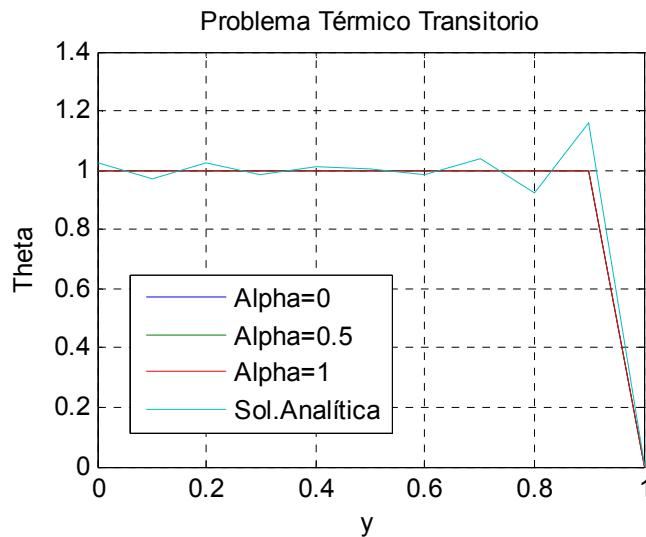
Dependencia de la solución analítica del número de iteraciones

Las gráficas siguientes fueron obtenidas con $\tau = 0.00005$ y $\delta\tau = 0.00005$ (1 iteración, solo para las soluciones numéricas). El comportamiento de la solución analítica se hace más exacto conforme se incrementa el número de iteraciones y su solución es oscilatoria debido a que la expresión contiene a la función coseno, la cual le otorga el comportamiento periódico a la curva.

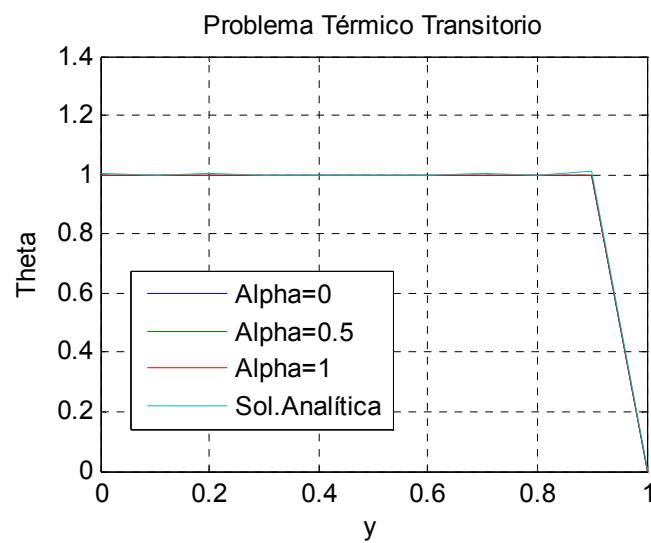
$$\theta_{(y,\tau)} = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{2(-1)^j}{(j+0.5)\pi} e^{-\pi^2(j+0.5)^2\tau} \cos[\pi(j+0.5)y] \right\}$$



En la figura anterior la solución analítica se obtuvo con 3 iteraciones.



En la figura anterior la solución analítica se obtuvo con 10 iteraciones.



En la figura anterior la solución analítica se obtuvo con 50 iteraciones.