CONTROL DIGITAL

TRABAJO PRÁCTICO 1

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Estudiante

FREDY ANDRÉS MERCADO NAVARRO
Pasaporte: 98´773.532
Maestría en Simulación Numérica y Control
Asignatura: Control Digital
Profesor: Dr. Aníbal Zanini
Cuatrimestre: II-2011
10 de Febrero

Universidad de Buenos Aires
Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Argentina
2012

INDICE DE CONTENIDOS

1. SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

Aquellos títulos que contienen la palabra (Matlab) corresponden a ejercicios que también fueron desarrollados con la ayuda de este software.

1.1 EJERCICIO 1 (Matlab)

Se discretizarán los sistemas $G_1(s)$ y $G_2(s)$ y serán comparados con los sistemas contínuos.

- Ensayarlos para distintos periodos de muestreo.
- Verificar la ubicación de Polos en s y z.
- Implementar un control proporcional simple.

Ejercicio 1.a

- Para $G_1(s)$:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+1}$$

Tomamos la entrada del sistema como un escalón unitario, luego:

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} * \frac{1}{s}$$

Expandiendo en fracciones parciales obtengo:

$$Y(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s}$$

Realizando la transformada inversa de Laplace obtengo la respuesta del sistema como una función continua del tiempo:

$$y(t) = 1 - e^{-t}$$

Ahora discretizo:

$$H(z) = \frac{Z[y(t)]}{\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)}$$

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z[y(t)]$$

Nótese que $y(t)$ es la respuesta de la función de transferencia ante una entrada escalón unitario. Luego:

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z[1 - e^{-t}]$$

$$H(z) = (1 - z^{-1})\left(\frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})}\right)$$

Comparando con las respuestas de Matlab, comprobamos para $T = 1$:

$$H(z) = \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{(1 - e^{-T}z^{-1})} = \frac{(1 - e^{-T})}{(z - e^{-T})} = \frac{(1 - e^{-1})}{(z - e^{-1})} = \frac{(1 - 0.3679)}{(z - 0.3679)} = \frac{0.6321}{z - 0.3679}$$

La comparación anterior resulta correcta. De este modo aseguramos el procedimiento para discretizar la salida de una función $G(s)$ en términos de z para una entrada escalón unitario y un retenedor de orden cero.

- Para $G_2(s)$:

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s + 0.5 + j)(s + 0.5 - j)} = \frac{1}{(s + 0.5)^2 - j^2} = \frac{1}{(s + 0.5)^2 + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1.25}$$

El resto del procedimiento es similar al expuesto en el ejercicio 1.1 y será desarrollado mediante Matlab.

Ejercicio 1.b

Fue desarrollado utilizando Matlab.

Ejercicio 1.c

Se implementará un control proporcional simple. Se realiza el cálculo de la función de transferencia total para el lazo de control cerrado con realimentación unitaria $H(s) = 1$.

Definimos:

$y = G(s)u$: señal de salida total o señal controlada.
$u = P(s)m$: señal de entrada para $G(s)$.
$m = r - b$: señal de entrada para $P(s)$.
$b = H(s)y = y$: señal de realimentación.
$G(s)$: función de transferencia del sistema.
$P(s)$: función de transferencia del control. Igual a la ganancia para control proporcional.
$H(s)$: función de transferencia de la señal de realimentación.

Luego:

$$y = GPm = GP(r - b) = GP(r - y) = GPr - GPy$$

$$y + GPy = GPr$$

$$y(1 + GP) = GPr$$

$$H_c = \frac{y}{r} = \frac{GP}{1 + GP} = \frac{G(s)P(s)}{1 + G(s)P(s)}$$

Ecuación 1

Siendo H_c la función de transferencia buscada.

Para control proporcional tenemos:

$$P(s) = K_p$$

- Para $G_1(s)$:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

Finalmente, luego de operar:

$$H_c = \frac{K_p}{s+1+K_p}$$

- Para $G_2(s)$:

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2+s+1.25}$$

$$H_c = \frac{k_p}{s^2+s+1.25+k_p}$$

1.2 EJERCICIO 2 (Matlab)

Tomaremos el siguiente sistema de ecuaciones como modelo para el sistema, las cuales fueron derivadas de ecuaciones donde se combina la segunda ley de Newton con las leyes de Kirchoff. Aquí la transformada de Laplace ya ha sido implementada:

$$s(Js+b)\theta(s) = KI(s)$$

$$(Ls+R)I(s) = V - Ks\theta(s)$$

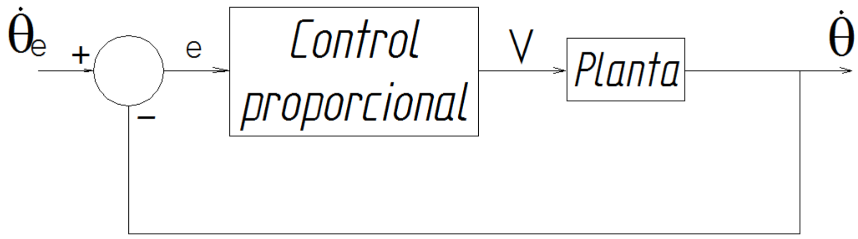
Donde:

$J = 0.01\ kg.m^2/s^2$: momento de inercia del eje.
$b = 0.1\ Nm.s$: factor de amortiguamiento del sistema mecánico.
$K = 0.01\ Nm/Amp$: FEM, constante.
$R = 1\ Ohm$: resistencia eléctrica.
$L = 0.5\ H$: inductancia eléctrica.
V: voltaje de la fuente (entrada).
$\dot{\theta}$: velocidad rotacional del eje (rad/s).

Luego, eliminando $I(s)$ obtenemos la siguiente función de transferencia en lazo abierto, donde la velocidad rotacional del eje es la salida y el voltaje es la entrada:

$$G(s) = \frac{\dot{\theta}}{V} = \frac{K}{(Js+b)(Ls+R)+K^2} = \frac{0.01}{(0.01s+0.1)(0.5s+1)+0.01^2}$$

Implementaremos un control proporcional (lazo cerrado). El diagrama es el siguiente:



La función de transferencia total para el lazo cerrado puede ser expresada como habíamos visto en la Ecuación 1, siendo $P(s)$ la función de transferencia del control proporcional. Se utilizará una función de transferencia para la señal de realimentación igual a 1:

$$H_c = \frac{G(s)P(s)}{1 + G(s)P(s)}$$

Sabemos que para control proporcional la función de transferencia es igual a la ganancia proporcional:

$$P(s) = k_p$$

Luego:

$$H_c = \frac{k_p G(s)}{1 + k_p G(s)} = \frac{k_p}{\frac{1}{G(s)} + k_p} = \frac{k_p}{(s+10)(0.5s+1) + 0.01 + k_p}$$

Ahora obtenemos la respuesta, teniendo la función de transferencia total y una entrada con forma de escalón unitario, donde supondremos que la velocidad angular deseada es 1 rad/s.

Realizaremos este procedimiento utilizando Matlab. Utilizando la forma con polos, ceros y ganancia tengo:

$$\frac{\dot{\theta}}{V} = \frac{K}{(Js+b)(Ls+R) + K^2} = \frac{K}{(JL)s^2 + (JR + bL)s + (bR + K^2)}$$

1.3 EJERCICIO 3 (Matlab)

Primero descomponemos la función de transferencia continua en fracciones parciales, así:

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+2)(s+3)}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+3}$$

$$1 = As(s+2)(s+3) + B(s+2)(s+3) + Cs^2(s+3) + Ds^2(s+2)$$

Para $s = 0$:

$$1 = 6B, \qquad B = \frac{1}{6}$$

Para $s = -2$:

$$1 = C(-2)^2(-2+3)$$

$$1 = 4C, \qquad C = \frac{1}{4}$$

Para $s = -3$:

$$1 = Ds^2(s+2) = D(-3)^2(-3+2)$$

$$1 = -9D, \qquad D = -\frac{1}{9}$$

Para $s = 1$:

$$1 = 12A + 2 + 1 - \frac{1}{3}$$

$$-\frac{5}{36} = A$$

La descomposición en fracciones parciales finalmente concluye que:

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+2)(s+3)} = -\frac{5}{36}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s+2}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{s+3}\right)$$

Si deseamos hallar la respuesta de $G(s)$ ante un escalón unitario tenemos:

$$Y(s) = G(s) * X(s)$$

Si el escalón, habiendo aplicado la transformada de Laplace es:

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

La respuesta es:

$$Y(s) = -\frac{5}{36}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{s^3}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+2}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+3}\right)$$

Si desarrollamos el tercer y cuarto término por fracciones parciales obtenemos:

$$\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+2}\right) = -\frac{1}{2(s+2)} + \frac{1}{2s}$$

$$\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+3}\right) = -\frac{1}{3(s+3)} + \frac{1}{3s}$$

Así:

$$Y(s) = \frac{19}{216}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{5}{36}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{s^3}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{s+2}\right) + \frac{1}{27}\left(\frac{1}{s+3}\right)$$

Ahora utilizo la transformada de Laplace inversa para determinar la respuesta en función del tiempo.

$$Y(t) = \frac{19}{216} - \frac{5}{36}t + \frac{1}{12}t^2 - \frac{1}{8}e^{-2t} + \frac{1}{27}e^{-3t}$$

Ahora discretizo:

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z[Y(t)]$$

$$H(z) = (1 - z^{-1})\left(\left(\frac{19}{216}\right)\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right) - \left(\frac{5}{36}\right)\left(\frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}\right) + \left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{T^2 z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}\right) - \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{1 - e^{-2T}z^{-1}}\right) + \frac{1}{27}\left(\frac{1}{1 - e^{-3T}z^{-1}}\right)\right)$$

$$H(z) = \left(\frac{19}{216}\right) - \left(\frac{5}{36}\right)\left(\frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}}\right) + \left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{T^2 z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2}\right) - \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{(1 - z^{-1})}{1 - e^{-2T}z^{-1}}\right) + \frac{1}{27}\left(\frac{(1 - z^{-1})}{1 - e^{-3T}z^{-1}}\right)$$

Como necesitamos la discretización para un periodo de muestreo $T = 1$ segundo, entonces reemplazo para obtener la discretización para la respuesta ante un escalón unitario y un retenedor de orden cero:

$$H(z) = \left(\frac{19}{216}\right) - \left(\frac{5}{36}\right)\left(\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}\right) + \left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2}\right) - \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{(1 - z^{-1})}{1 - e^{-2}z^{-1}}\right) + \frac{1}{27}\left(\frac{(1 - z^{-1})}{1 - e^{-3}z^{-1}}\right)$$

1.4 EJERCICIO 4

Determinar si los sistemas bajo estudio representan a la discretización de un sistema continuo con bloqueador de orden cero.

Para ello debemos tener en cuenta la teoría, donde sabemos de antemano que existe una relación entre los polos de un sistema continuo y los polos de su contraparte discreta. Esta relación está dada por:

$$Polos\ discretos\ z_i = e^{s_i T}$$

$$Polos\ continuos\ s_i = \frac{\operatorname{Ln} z_i}{T}$$

De este modo, si dado un polo discreto z_i su valor es negativo obtenemos que no existe un polo s_i que satisfaga la ecuación, por lo tanto no existe representación continua para el sistema discreto. Trabajaremos los ejercicios teniendo esto en cuenta.

Ejercicio 4.a

$$y_k - 0.5y_{k-1} = 6u_{k-1}$$

$$y(z) - 0.5z^{-1}y(z) = 6z^{-1}u(z)$$

$$(1 - 0.5z^{-1})y(z) = 6z^{-1}u(z)$$

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{6z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{6}{z - 0.5}$$

Dado que el polo de $H(z)$ es $z = 0.5$ podemos decir que el sistema discreto posee representación contínua.

Ejercicio 4.b

Tenemos el siguiente sistema:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.7 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = [1 \quad 1] x_k$$

Podemos verificarlo hallando los valores característicos de la matriz:

$$z = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix}$$

Para hallarlos operamos:

$$\det(\lambda_z I - z) = 0$$

Luego:

$$\begin{vmatrix} \lambda_z + 0.5 & -1 \\ 0 & \lambda_z + 0.3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda_z + 0.5)(\lambda_z + 0.3) = 0$$

De aquí obtenemos que $\lambda_{z1} = -0.5$ y $\lambda_{z2} = -0.3$. Dado que ambos valores característicos son negativos, se concluye que la representación contínua del sistema no existe.

Ejercicio 4.c

$$y_k + 0.5y_{k-1} = 6u_{k-1}$$

$$y(z) + 0.5z^{-1}y(z) = 6z^{-1}u(z)$$

$$(1 + 0.5z^{-1})y(z) = 6z^{-1}u(z)$$

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{6z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} = \frac{6}{z + 0.5}$$

Dado que el polo de $H(z)$ es $z = -0.5$ podemos decir que el sistema discreto no posee representación contínua.

1.5 EJERCICIO 5

Probar que el siguiente sistema continuo con bloqueador de orden cero $G(s)$ resulta en $G(z)$:

$$G(s) = \frac{1}{s^n}, \qquad G(z) = \frac{T^n}{n!}\frac{B_n(z)}{(z-1)^n}$$

Desarrollo:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^n} \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^n}X(s)$$

La respuesta a una entrada escalón unitario es, entonces:

$$Y(s) = \frac{1}{s^{n+1}}$$

Discretizamos mediante la siguiente expresión:

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z\{\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]\}$$

Ecuación 2

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y(t) = \frac{t^{(n+1)-1}}{[(n+1)-1]!} = \frac{t^n}{n!}, \qquad para\; m + 1 = 1, 2, 3 \ldots$$

Luego:

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{t^n}{n!}\right\} = \frac{(1 - z^{-1})}{n!} * Z\{t^n\}$$

Por la definición de transformada Z tenemos que:

$$Z\{t^n\} = \sum_{k=0}^{\infty}(kT)^n z^{-k} = T^n \sum_{k=0}^{\infty} k^n z^{-k} = T^n(1^n z^{-1} + 2^n z^{-2} + 3^n z^{-3} \ldots)$$

Luego, sustituyendo y reformulando la serie en términos de potencias obtengo:

$$Z\{t^n\} = \frac{T^n z^{-1}\beta(z)}{(1 - z^{-1})^{n+1}}$$

De la Ecuación 2 tengo:

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1})}{n!} * \frac{T^n z^{-1}\beta(z)}{(1 - z^{-1})^{n+1}} = \frac{T^n}{n!} * \frac{z^{-1}\beta(z)}{(1 - z^{-1})^n} = \frac{T^n}{n!} * \frac{z^{-1}\beta(z)}{(1 - z^{-1})^n} * \frac{z^n}{z^n}$$

$$H(z) = \frac{T^n}{n!} * \frac{z^{n-1}\beta(z)}{(z-1)^n}, \qquad donde\; z^{n-1}\beta(z) = B_n(z)$$

De este modo:

$$H(z) = \frac{T^n}{n!} * \frac{B_n(z)}{(z-1)^n}$$

Siendo $B_n(z)$ de la forma que indica el enunciado del problema.

1.6 EJERCICIO 6

Determinar la cantidad de polos y ceros del sistema:

$$y_k - 0.5y_{k-1} + y_{k-2} = 2u_{k-10} + u_{k-11}$$

$$y_k = 0.5y_{k-1} - y_{k-2} + 2u_{k-10} + u_{k-11}$$

$$Z\{y_k\} = Z\{0.5y_{k-1} - y_{k-2} + 2u_{k-10} + u_{k-11}\}$$

$$Z\{y_k\} = Z\{0.5y_{k-1}\} - Z\{y_{k-2}\} + Z\{2u_{k-10}\} + Z\{u_{k-11}\}$$

$$y(z) = 0.5z^{-1}y(z) - z^{-2}y(z) + 2z^{-10}u(z) + z^{-11}u(z)$$

$$(1 - 0.5z^{-1} + z^{-2})y(z) = (2z^{-10} + z^{-11})u(z)$$

Luego:

$$H(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{2z^{-10} + z^{-11}}{1 - 0.5z^{-1} + z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{2z + 1}{z^{11} - 0.5z^{10} + z^9} = \frac{2(z + 0.5)}{z^9(z^2 - 0.5z + 1)}$$

Podemos concluir entonces que $H(z)$ tiene un cero y once polos.

1.7 EJERCICIO 7

Se determinarán los polinomios $A(q), B(q), A^*(q^{-1}), B^*(q^{-1})$.

$$y_k - 0.5y_{k-1} = u_{k-9} + 0.2u_{k-10}$$

Realizamos la sustitución $k = k + 10$. Luego:

$$y_{k+10} - 0.5y_{k+9} = u_{k+1} + 0.2u_k$$

$$z^{10}y(z) - 0.5z^9y(z) = zu(z) + 0.2u(z)$$

$$(z^{10} - 0.5z^9)y(z) = (z + 0.2)u(z)$$

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{z + 0.2}{z^{10} - 0.5z^9} = \frac{q + 0.2}{q^{10} - 0.5q^9} = \frac{B(q)}{A(q)}$$

Ecuación 3

Luego:

$$B(q) = q + 0.2$$

$$A(q) = q^{10} - 0.5q^9$$

Dado que el orden de un sistema está dado por la potencia más alta de polinomio del denominador, concluimos que el sistema es de orden 10.

Ahora determinamos $A^*(q^{-1})$ y $B^*(q^{-1})$. Partimos de la ecuación en diferencias original:

$$y_k - 0.5y_{k-1} = u_{k-9} + 0.2u_{k-10}$$

Transformamos a Z:

$$y(z) - 0.5z^{-1}y(z) = z^{-9}u(z) + 0.2z^{-10}u(z)$$

$$(1 - 0.5z^{-1})y(z) = z^{-9}(1 + 0.2z^{-1})u(z)$$

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{(1 + 0.2z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})}z^{-9} = \frac{(1 + 0.2q^{-1})}{(1 - 0.5q^{-1})}q^{-9} = \frac{B^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}q^{-d}$$

Ecuación 4

De este modo tenemos que:

$$B^*(q^{-1}) = 1 + 0.2q^{-1}$$

$$A^*(q^{-1}) = 1 - 0.5q^{-1}$$

$$d = 9$$

Luego, de la Ecuación 3 y Ecuación 4 tenemos:

$$\frac{B(q)}{A(q)} = \frac{B^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}q^{-d}$$

1.8 EJERCICIO 8

Sea el sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Determinar su representación discreta si:

$$u(t) = \sum \delta(t - kT)u(kT)$$

Para un periodo de muestreo T, tenemos que $t = kT$. Luego, el modelo para el sistema invariante con el tiempo es:

$$x(kT + T) = \Phi x(kT) + \Gamma u(kT)$$

$$y(kT) = Cx(kT)$$

Donde:

$$\Phi = e^{AT}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{As} ds B$$

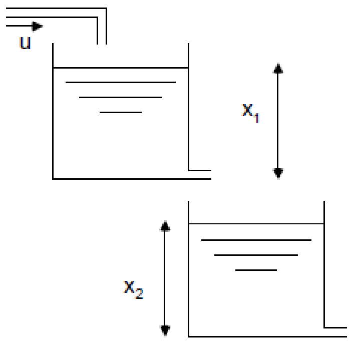
Luego, integrando la ecuación del sistema obtenemos la representación discreta del sistema:

$$x(kT+T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{As}B\delta(s-kT)u(kT)ds = e^{AT}x(kT) + Bu(kT)$$

$$y(kT) = Cx(kT)$$

1.9 EJERCICIO 9

Sea el sistema de la figura:



Encontrar un modelo en variables de estado aproximado con dos estados x_1 y x_2. Muestrearlo y encontrar la relación entrada – salida en Z.

Para desarrollar el problema tenemos entonces que la señal de entrada es el flujo de caudal al primer tanque (u) y la señal de salida es el nivel de fluido en el segundo tanque (x_2). Si usamos los niveles como variables de estado podemos emplear el siguiente modelo:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} -0.0197 & 0 \\ 0.0178 & -0.0129 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0263 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = Cx = [0 \quad 1]x$$

Primero determinamos los valores característicos de A, así:

$$(\lambda + a)(\lambda + d) - bc = \lambda^2 + (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

De donde obtengo que:

$$\lambda = -\frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-d)^2 + 4bc}{4}}$$

Utilizando los conceptos del apéndice B del libro de Astrom [1] hallamos que:

$$e^{Ah} = \alpha_0 I + \alpha_1 AT$$

Luego:

$$e^{\lambda_1 T} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 T$$

$$e^{\lambda_2 T} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 T$$

Nuestro objetivo es hallar la matriz Φ, luego:

$$\alpha_0 = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 T} - \lambda_2 e^{\lambda_1 T}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\alpha_1 = \frac{e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T}}{(\lambda_1 - \lambda_2)T}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \alpha_0 - \alpha_1 aT & \alpha_1 bT \\ \alpha_1 cT & \alpha_0 - \alpha_1 dT \end{bmatrix}$$

$$\beta_0 = \int_0^T \alpha_0(s) ds = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(e^{\lambda_2 T} - 1\right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(e^{\lambda_1 T} - 1\right)\right)$$

$$\beta_1 = \int_0^T s\alpha_1(s) ds = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_1}\left(e^{\lambda_2 T} - 1\right) - \frac{1}{\lambda_2}\left(e^{\lambda_2 T} - 1\right)\right)$$

$$E = \beta_0 B + \beta_1 AB$$

Realizando ahora los cálculos obtengo:

$$\lambda_1 = -0.0197, \qquad \lambda_2 = -0.0129$$

$$e^{\lambda_1 T} = 0.7895, \qquad e^{\lambda_2 T} = 0.8566$$

$$\alpha_0 = 0.9839, \qquad \alpha_1 = 0.8223$$

Luego:

$$\Phi = \alpha_0 I + 12\alpha_1 A = \begin{bmatrix} 0.790 & 0 \\ 0.176 & 0.857 \end{bmatrix}$$

$$\beta_0 = 11.9412$$

$$\beta_1 = 63.3824$$

$$\Gamma = (\beta_0 I + \beta_1 A)B = \begin{bmatrix} 0.281 \\ 0.0296 \end{bmatrix}$$

La función de transferencia en Z se halla entonces de la siguiente manera:

$$H(z) = C(zI - \Phi)^{-1}\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - 0.790 & 0 \\ -0.176 & z - 0.857 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.281 \\ 0.0297 \end{bmatrix}$$

$$H(z) = \frac{0.030z + 0.026}{z^2 - 1.65z + 0.68}$$

1.10 EJERCICIO 10

Determinar observabilidad y controlabilidad y simular el siguiente sistema:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix} x_k$$

La matriz de observabilidad es:

$$W_0 = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

De donde podemos concluir que el sistema no es observable dado que:

$$\det(W_0) = (2)(-2) - (1)(-4) -= -4 + 4 = 0$$

La matriz de controlabilidad es:

$$W_c = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(W_c) = (6)(1) - (1)(4) = 2$, de modo que podemos decir que el sistema es alcanzable.

1.11 EJERCICIO 11

Determinar observabilidad y controlabilidad y simular el siguiente sistema:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x_k$$

¿Y si se utiliza una única entrada $u_k = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u\acute{}_k$ con $u\acute{}_k$ escalar?

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de observabilidad es:

$$W_0 = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de observabilidad posee sus dos vectores columna linealmente independientes, por lo tanto su rango es 2 y su determinante es igual a -2 (diferente de cero), por lo tanto el sistema es observable.

La matriz de controlabilidad es:

$$W_c = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Las dos primeras columnas de la matriz W_c son linealmente independientes, por lo tanto W_c tiene rango 2 y el sistema el alcanzable. Luego, de la entrada $u\acute{}_k$ obtenemos lo siguiente:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u'_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u'_k$$

Dado que Φ y C permanecen iguales, el sistema es observable. A continuación calculamos la matriz de controlabilidad:

$$W_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Luego el rango de $W_c = 1$ y el sistema no es alcanzable desde u'.

1.12 EJERCICIO 12

Determinar observabilidad y controlabilidad y simular el siguiente sistema:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k$$

a) Encontrar una entrada para llevarlo desde $x_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ al origen y,
b) desde el origen a $x_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

La matriz de observabilidad es:

$$W_0 = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ C\Phi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

La matriz de observabilidad posee sus tres vectores columna linealmente independientes, por lo tanto su rango es 3 y su determinante es igual a 3 (diferente de cero), por lo tanto el sistema es observable. A continuación desarrollamos los puntos a y b. En el punto b se determinará que el sistema no es controlable para las condiciones dadas.

a) Para hallar la entrada seguimos el siguiente procedimiento:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 + u_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 + u_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + u_0 \\ u_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego, para hallar la entrada tenemos que:

$$3 + u_0 = 0 \rightarrow u_0 = -3$$

$$u_1 = 0$$

Lo anterior, de modo que se cumpla que $x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Así obtenemos la entrada para llevar el sistema desde $x_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ al origen.

b) Para conocer si podemos llevar el sistema desde el origen hasta $x_0^T = [1 \quad 1 \quad 1]$ utilizamos la matriz de controlabilidad para conocer si el sistema es alcanzable o no, luego:

$$W_c = [\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \Phi^2\Gamma] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De la matriz anterior podemos observar que no posee rango 3, por lo tanto no es alcanzable. Es posible observar que $x_0 = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ no se encuentra en el espacio de columnas de W_c. También es posible observar en Φ que x_3 será 0 para todo valor de $k > 0$.

1.13 EJERCICIO 13

Dado el siguiente sistema contínuo:

$$G(s) = \frac{0.3964(s)^2 - 1.139(s) + 1.12}{s^3 + 0.2107(s)^2 + 0.1174(s) + 0.0112}$$

Transformarlo a discreto usando la aproximación:

$$H(z) = G(s)\big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}}$$

Hallaremos $H(z)$ evaluando la aproximación otorgada para la variable compleja s en la ecuación $G(s)$. Realizamos primero la siguiente sustitución:

$$a = (2z - 1), \qquad b = (Tz + 1)$$

Luego, desarrollando algebraicamente, obtenemos la siguiente expresión:

$$H(a, b) = \frac{0.3964a^2b - 1.139ab^2 + 1.12b^3}{a^3 + 0.2107a^2b + 0.1174ab^2 + 0.0112b^3}$$

Sacamos b como factor común en el numerador:

$$H(a, b) = \frac{b(0.3964a^2 - 1.139ab + 1.12b^2)}{a^3 + 0.2107a^2b + 0.1174ab^2 + 0.0112b^3}$$

Reemplazando de vuelta los valores a y b, obtengo:

$$H(z, T) = \frac{(Tz + 1)[0.3964(2z - 1)^2 - 1.139(2z - 1)(Tz + 1) + 1.12(Tz + 1)^2]}{(2z - 1)^3 + 0.2107(2z - 1)^2(Tz + 1) + 0.1174(2z - 1)(Tz + 1)^2 + 0.0112(Tz + 1)^3}$$

Formulación alternativa

También podemos expresar la misma expresión así:

$$H(z, T) = \frac{(2.6554 + (-3.8636 + 6.0344T)z + (1.5856 - 6.1417T + 4.499T^2)z^2 + T(1.5856 - 2.2878T + 1.12T^2)z^3)}{-0.8955 + (5.392 + 0.0095T)z + (-11.1572 - 0.3732T - 0.0838T^2)z^2 + (8 + 0.8428T + 0.2348T^2 + 0.0112T^3)z^3}$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ASTROM, Karl. Wittenmark, Bjorn. Computer Controlled Systems: Theory and Design. Tercera Edición. Tsinghua University Press. Prentice Hall. 1997.