

Geometría vectorial - Ej. 5

Se tienen dos vectores $A = \langle 2, -1, 2 \rangle$ y $B = \langle 1, 2, -3 \rangle$. Hallar los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$ en $\mathbb{R}^3$, tal que $\vec{A} = \vec{C} + \vec{D}$, $\vec{B} \cdot \vec{D} = 0$ y $\vec{C}$ paralelo a $\vec{B}$.

$$\text{Se tiene } A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Para $\vec{A} = \vec{C} + \vec{D}$ tenemos:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix}, \text{ luego: } \begin{aligned} C_x + D_x &= 2 & (1) \\ C_y + D_y &= -1 & (2) \\ C_z + D_z &= 2 & (3) \end{aligned}$$

Para $\vec{B} \cdot \vec{D} = 0$ tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = 0.$$

$$\text{Luego, } \boxed{D_x + 2D_y - 3D_z = 0.} \quad (7)$$

Para $\vec{C} \parallel \vec{B}$ se debe cumplir:

$$\vec{C} = K \vec{B}$$

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ 2K \\ -3K \end{bmatrix}$$

$$\text{Luego, } C_x = K \quad (9)$$

$$C_y = 2K \quad (10)$$

$$C_z = -3K \quad (11)$$

Despejamos D_x, D_y y D_z de (1), (2) y (3).

$$D_x = 2 - C_x \quad (4)$$

$$D_y = -1 - C_y \quad (5)$$

$$D_z = 2 - C_z \quad (6)$$

Al sustituir (4), (5) y (6) en (7) se obtiene:

$$-C_x - 2C_y + 3C_z - 6 = 0 \quad (8)$$

Se sustituye (9), (10) y (11) en (8):

$$-(K) - 2(2K) + 3(-3K) - 6 = 0. \quad (12)$$

$$\text{De (12) obtenemos } \boxed{K = -3/7} \quad (13)$$

Al sustituir (13) en (9), (10) y (11) obtenemos $\vec{C}$:

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} -3/7 \\ -6/7 \\ 9/7 \end{bmatrix}.$$

Dado que $\vec{A} = \vec{C} + \vec{D}$, $\vec{D} = \vec{A} - \vec{C}$, luego,

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3/7 \\ -6/7 \\ 9/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/7 \\ -1/7 \\ 5/7 \end{bmatrix}.$$