

Ejercicio 8 | Geometría analítica

Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos $z = x + y$ y $2x - 5y - z = 1$ y el ángulo entre ellos.

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= [(1)(-1) - (-1)(-5)]\hat{i} + [(-1)(2) - (-1)(1)]\hat{j} + [(1)(-5) - (2)(1)]\hat{k}$$

$$= [-1 - 5]\hat{i} + [-2 + 1]\hat{j} + [-5 - 2]\hat{k}$$

$$= -6\hat{i} - 1\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\pi_1: x + y - z = 0$$

$$\pi_2: 2x - 5y - z = 1$$

Para $x = 0$, $\pi_1: y - z = 0$ (4)

$$\pi_2: -5y - z = 1$$
 (5)

De (4): $y = z$ (6)

(6) en (5): $-5z - z = 1$ (7)

$$-6z = 1$$

$$z = -\frac{1}{6}$$
 (8)

(8) en (6): $y = -\frac{1}{6}$

Punto P en intersección: $P(0, -1/6, -1/6)$

Queda:

$$\begin{aligned} x &= 0 - 6t = 0 + 6t \\ y &= -1/6 - t = -1/6 + t \\ z &= -1/6 - 7t = -1/6 + 7t \end{aligned}$$

Planos $x + y = z$ (1)

$2x - 5y - z = 1$ (2)

De (1): $x + y - z = 0$ (3)

$$\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Ángulo: $\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}$

$$\|\vec{n}_1\| = \sqrt{3}, \quad \|\vec{n}_2\| = \sqrt{4 + 25 + 1} = \sqrt{30}$$

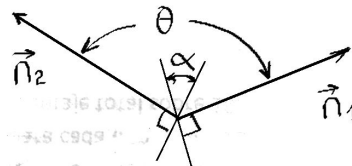
$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 5 + 1 = -2$$

$$\cos \theta = \frac{-2}{\sqrt{3} \sqrt{30}} = \frac{-2}{\sqrt{90}} = \frac{-2}{\sqrt{3} \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{-2}{\sqrt{3^2 \cdot 2 \cdot 5}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-2}{3\sqrt{10}} \right)$$

$$\theta = 102,17^\circ$$

Pero θ es el ángulo entre los vectores normales a los planos, no entre los planos (α):



Finalmente: $\alpha = 180^\circ - \theta$

$$\alpha = 77.82^\circ$$