

Tenemos: $P(X_1, Y_1)$ Usando la expresión para calcular la proyección de un vector sobre otro, demuestre que la distancia de un punto a la recta $AX + BY + C = 0$.

1. $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{u}\| \|\vec{n}\|}$ ① Ángulo entre dos vectores.

2. Por trigonometría: $\cos \alpha = \frac{RP}{RS}$
 $\cos \alpha = \frac{\|\text{Proy}_{\vec{n}} \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ ②

① = ②

3. $\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{u}\| \|\vec{n}\|} = \frac{\|\text{Proy}_{\vec{n}} \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

4. $\vec{u} \cdot \vec{n} = \|\vec{n}\| \|\text{Proy}_{\vec{n}} \vec{u}\|$ De 3.

5. distancia = $d = \|\text{Proy}_{\vec{n}} \vec{u}\|$

6. $\vec{u} \cdot \vec{n} = \|\vec{n}\| d$. Sust. de ⑤ en ④.

7. $d = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ De ⑥

8. Si $y = \frac{-AX - C}{B}$. De *

9. Punto $Q(X, Y) \rightarrow Q\left(X, \frac{-AX - C}{B}\right)$ De ⑧ en ⑨.

10. $\vec{u} = \vec{QP} = \vec{P} - \vec{Q} = (X_1, Y_1) - \left(X, \frac{-AX - C}{B}\right)$

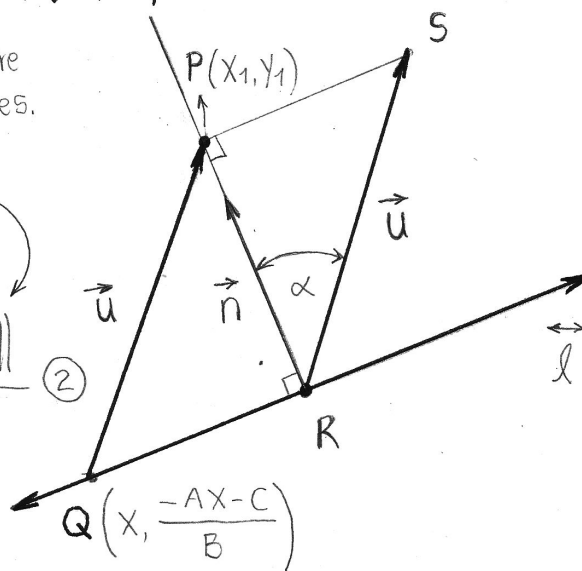
11. $\vec{u} = \left(X_1 - X, Y_1 + \frac{AX + C}{B}\right)$ De ⑩

12. $\vec{n} = (A, B)$ De *. Vector normal a $\vec{l}$.

13. $\vec{u} \cdot \vec{n} = A(X_1 - X) + B\left(Y_1 + \frac{AX + C}{B}\right)$

14. $\vec{u} \cdot \vec{n} = AX_1 - AX + BY_1 + AX + C$

15. $\vec{u} \cdot \vec{n} = AX_1 + BY_1 + C$



16. $\|\vec{n}\| = \sqrt{A^2 + B^2}$

17. $d = \frac{AX_1 + BY_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ⑮ y ⑯ en ⑦

18. Si $\vec{u} = \vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$

Entonces:

19. $\vec{u} \cdot \vec{n} = -(AX_1 + BY_1 + C)$

20. $d = \frac{-(AX_1 + BY_1 + C)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Por eso; de ⑰ y ⑳:

$$d = \frac{|AX_1 + BY_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

thefinitelement.com