

Ejercicio 16 | Geometría vectorial

Sean $\vec{U}$, $\vec{V}$ y $\vec{W}$ vectores en $\mathbb{R}^2$ tales que $\|\vec{U}\|=3$, $\|\vec{V}\|=4$ y $\|\vec{W}\|=2$. Si el ángulo entre $\vec{U}$ y $\vec{V}$ es 60° y el ángulo entre $\vec{V}$ y $\vec{W}$ es de 120° , y si $\vec{Z} = 2\vec{U} - \vec{V} + 3\vec{W}$, calcular $\vec{Z} \cdot \vec{V}$.

$$\vec{Z} \cdot \vec{V} = \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = z_x v_x + z_y v_y \quad (1)$$

$$\vec{Z} = 2 \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_x - v_x + 3w_x \\ 2u_y - v_y + 3w_y \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$(2) \text{ en } (1): \vec{Z} \cdot \vec{V} = (2u_x - v_x + 3w_x)v_x + (2u_y - v_y + 3w_y)v_y$$

$$= 2u_x v_x - v_x^2 + 3v_x w_x + 2u_y v_y - v_y^2 + 3v_y w_y \quad (3)$$

$$\text{Si } \|\vec{U}\|=3 = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \rightarrow 9 = u_x^2 + u_y^2 \quad (4)$$

$$16 = v_x^2 + v_y^2 \quad (5)$$

$$4 = w_x^2 + w_y^2 \quad (6)$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{U}\| \|\vec{V}\|} = \frac{u_x v_x + u_y v_y}{12} \rightarrow 12 \cos 60^\circ = u_x v_x + u_y v_y \quad (7)$$

$$\cos 120^\circ = \frac{\vec{V} \cdot \vec{W}}{\|\vec{V}\| \|\vec{W}\|} \Rightarrow 8 \cos 120^\circ = v_x w_x + v_y w_y \quad (8)$$

$$\text{De } (7) \text{ y } (8) \text{ en } (3): 2(12 \cos 60^\circ) + 3(8 \cos 120^\circ) - (16)$$

$$= 24 \cos 60^\circ + 24 \cos 120^\circ - 16$$

$$\boxed{\vec{Z} \cdot \vec{V} = -16}$$