Ejercicio 20 | Rectas y planos

Geometría vectorial y analítica

thefinitelement.com

La recta con ecuación,

$$l_1:\ \ x = \frac{2-y}{-1} = 1-z$$

se interseca con el plano $\pi: 3x - y + z - 3 = 0$ en el punto G. Hallar la ecuación general del plano que contiene al punto G y a la recta,

$$l_2:\ \ x = y + 5 = \frac{z-10}{2}$$

Solución

Se halla primero el punto de intersección G entre la recta l_1 y el plano π llevando la recta a la forma paramétrica y sustituyendo en la ecuación del plano (es decir, hallando la solución del sistema de ecuaciones):

$$x = 0 + t$$

$$y = 2 + t$$

$$z = 1 - t$$

Sustituyendo en π se obtiene:

$$3(t) - (2+t) + (1-t) - 3 = 0$$

Resultando:

$$t = 4$$

Con este parámetro hallamos el punto de intersección G:

$$x = 0 + 4 = 4$$

$$y = 2 + 4 = 6$$

$$z = 1 - 4 = -3$$

$$G(4,6,-3)$$

El plano cuya ecuación general se solicita debe contener a la recta l_2. Conviene extraer su vector director ($\vec{d}$) y un vector posición de un punto que pertenezca a ella ($\vec{p}$):

$$l_2:\ \ \frac{x-0}{1} = \frac{y-(-5)}{1} = \frac{z-10}{2}$$

$$\vec{d} = (1,1,2)$$

$$\vec{p} = (0,-5,10)$$

Para usar la forma normal de la ecuación de un plano $\vec{n}\cdot\vec{x} = \vec{n}\cdot\vec{p}$ requerimos un vector normal al plano, el cual se puede calcular como:

$$\vec{n} = \vec{d} \times \overrightarrow{PG} = \vec{d} \times \overrightarrow{(G-P)} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \times \left[\begin{pmatrix}4\\6\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}4\\11\\-13\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-35\\21\\7\end{bmatrix}$$

Finalmente, realizando las sustituciones respectivas, la solución es:

$$\vec{n}\cdot\vec{x} = \vec{n}\cdot\vec{p}$$

$$\begin{bmatrix}-35\\21\\7\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-35\\21\\7\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\-5\\10\end{bmatrix}$$

$$5x - 3y - z = 5$$