Ejercicio 21 | Rectas y planos

Geometría vectorial y analítica

thefinitelement.com

La recta con ecuación,

$$l_1: \ \frac{2-x}{-1} = 1-y = z$$

se interseca con el plano $\pi: x - y - 3z + 2 = 0$ en el punto G. Hallar la ecuación general del plano que contiene al punto G y a la recta,

$$l_2: \ \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-2}{3}$$

Solución

Se halla primero el punto de intersección G entre la recta l_1 y el plano π llevando la recta a la forma paramétrica y sustituyendo en la ecuación del plano (es decir, hallando la solución del sistema de ecuaciones):

$$x = 2 + t$$

$$y = 1 - t$$

$$z = t$$

Sustituyendo en π se obtiene:

$$(2+t) - (1-t) - 3(t) + 2 = 0$$

Resultando:

$$t = 3$$

Con este parámetro hallamos el punto de intersección G:

$$x = 2 + 3 = 5$$

$$y = 1 - 3 = -2$$

$$z = 3$$

$$G(5,-2,3)$$

El plano cuya ecuación general se solicita debe contener a la recta l_2. Conviene extraer su vector director ($\vec{d}$) y un vector posición de un punto que pertenezca a ella ($\vec{p}$):

$$l_2: \ \frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-2}{3}$$

$$\vec{d} = (2,1,3)$$

$$\vec{p} = (1,0,2)$$

Para usar la forma normal de la ecuación de un plano $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}$ requerimos un vector normal al plano, el cual se puede calcular como:

$$\begin{aligned}\vec{n} = \vec{d} \times \overrightarrow{PG} = \vec{d} \times \overrightarrow{(G-P)} \\ = \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} \times \left[\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right] \\ = \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}4\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\10\\-8\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Finalmente, realizando las sustituciones respectivas, la solución es:

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}$$

$$\begin{bmatrix}7\\10\\-8\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\10\\-8\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$7x + 10y - 8z = -9$$