GEOMETRIA ANALITICA - thefinitelement.com

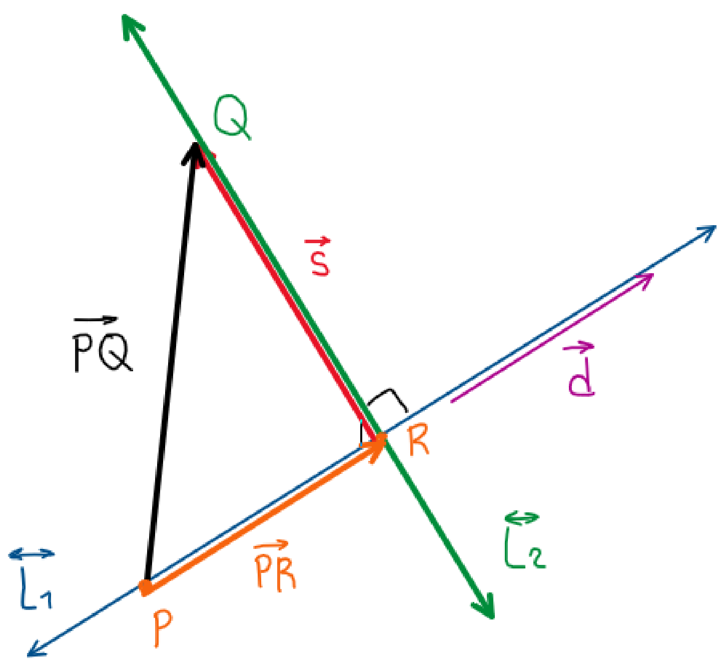
A continuación, encontrará la solución genérica del ejercicio en términos de las variables que participan en el problema. Lea la solución general y trate de comprenderla. Al final, se presentan cinco ejemplos con números, para que aplique la solución presentada y corrobore los resultados.

Ejercicio. Hallar las ecuaciones simétricas de la recta $\overleftrightarrow{L_1}$ que pasa por el punto $Q(q_1, q_2, q_3)$ y es ortogonal e interseca a la recta,

$$\overleftrightarrow{L_2}: \quad \frac{x-p_1}{d_1} = \frac{y-p_2}{d_2} = \frac{z-p_3}{d_3}$$

Hallar, adicionalmente, las coordenadas del punto de intersección de $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.

Solución:



El problema brinda las coordenadas del punto Q y las ecuaciones simétricas de la recta $\overleftrightarrow{L_2}$. De allí se puede obtener un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ y definir el siguiente vector:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$$

De la ecuación dada por el problema para $\overleftrightarrow{L_2}$ se pueden obtener las componentes de un vector director:

$$\overrightarrow{d} = (d_1, d_2, d_3)$$

Si la recta $\overleftrightarrow{L_1}$ solicitada es ortogonal e intersecta a $\overleftrightarrow{L_2}$ se puede obtener un vector proyección que permita hallar un vector director para la recta solicitada. Esto garantiza el punto de intersección y la ortogonalidad entre $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$:

$$Proy_{\overrightarrow{d}}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$$

Siendo R el punto de intersección buscado perteneciente a $\overleftrightarrow{L_2}$ y a $\overleftrightarrow{L_1}$. Luego, se define el vector $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{s}$ como vector director para la recta buscada $\overleftrightarrow{L_1}$:

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{s} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} = (s_1, s_2, s_3)$$

Con esto se puede escribir la forma simétrica de la ecuación de la recta que pide el problema:

$$\frac{x - q_1}{s_1} = \frac{y - q_2}{s_2} = \frac{z - q_3}{s_3}$$

Para hallar las coordenadas del punto $R(r_1, r_2, r_3)$ se puede realizar una simple suma de vectores:

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{PR} = (p_1 + PR_1, p_2 + PR_2, p_3 + PR_3) = (r_1, r_2, r_3)$$

Luego, las coordenadas del punto R se pueden obtener de las componentes del vector $\overrightarrow{R}$ como:

$$R(r_1, r_2, r_3)$$

Las respuestas se hallan a continuación ($vecs$ son las componentes del vector $\overrightarrow{s}$ y $vecR$ son las coordenadas del punto R):

Ejemplo 1. Hallar las ecuaciones simétricas de la recta $\overleftrightarrow{L_1}$ que pasa por el punto $Q(3, -2, 1)$ y es ortogonal e interseca a la recta,

$$\overleftrightarrow{L_2}: \quad x + 1 = \frac{y - 2}{2} = \frac{4 - z}{3}$$

Hallar, adicionalmente, las coordenadas del punto de intersección de $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.

Solución:

```
vecQ
         3          -2           1
vecs
     51/14       -33/7      -27/14
vecR
     -9/14        19/7       41/14
```

$$\frac{x - 3}{51/14} = \frac{y + 2}{-33/7} = \frac{z - 1}{-27/14}$$

$$R(-9/14, 19/7, 41/14)$$

Ejemplo 2. Hallar las ecuaciones simétricas de la recta $\overleftrightarrow{L_1}$ que pasa por el punto $Q(1,2,3)$ y es ortogonal e interseca a la recta,

$$\overleftrightarrow{L_2}: \quad \frac{x-2}{3} = \frac{-3-y}{2} = z-1$$

Hallar, adicionalmente, las coordenadas del punto de intersección de $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.

```
vecQ
           1          2          3
vecs
       19/14       24/7      39/14
vecR
       -5/14      -10/7       3/14
```

Solución:

$$\frac{x-1}{19/14} = \frac{y-2}{24/7} = \frac{z-3}{39/14}$$
$$R(-5/14, -10/7, 3/14)$$

Ejemplo 3. Hallar las ecuaciones simétricas de la recta $\overleftrightarrow{L_1}$ que pasa por el punto $Q(0,1,4)$ y es ortogonal e interseca a la recta,

$$\overleftrightarrow{L_2}: \quad \frac{-3-x}{2} = \frac{2+y}{4} = z-1$$

Hallar, adicionalmente, las coordenadas del punto de intersección de $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.

```
vecQ
           0          1          4
vecs
        27/7        9/7       18/7
vecR
       -27/7       -2/7       10/7
```

Solución:

$$\frac{x}{27/7} = \frac{y-1}{9/7} = \frac{z-4}{18/7}$$
$$R(-27/7, -2/7, 10/7)$$

Ejemplo 4. Hallar las ecuaciones simétricas de la recta $\overleftrightarrow{L_1}$ que pasa por el punto $Q(2,2,-1)$ y es ortogonal e interseca a la recta,

$$\overleftrightarrow{L_2}: \quad x-1 = \frac{-y}{2} = \frac{2+z}{-3}$$

Hallar, adicionalmente, las coordenadas del punto de intersección de $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.

```
vecQ
          2          2         -1
vecs
       10/7        8/7       -2/7
vecR
        4/7        6/7       -5/7
.
```

Solución:

$$\frac{x-2}{10/7} = \frac{y-2}{8/7} = \frac{z+1}{-2/7}$$

$$R(4/7, 6/7, -5/7)$$

Ejemplo 5. Hallar las ecuaciones simétricas de la recta $\overleftrightarrow{L_1}$ que pasa por el punto $Q(1,0,4)$ y es ortogonal e interseca a la recta,

$$\overleftrightarrow{L_2} : \quad \frac{-2-x}{3} = y-1 = \frac{z+3}{2}$$

Hallar, adicionalmente, las coordenadas del punto de intersección de $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.

```
vecQ
          1          0          4
vecs
       27/7       -9/7       45/7
vecR
      -20/7        9/7     -17/7
.
```

Solución:

$$\frac{x-1}{27/7} = \frac{y}{-9/7} = \frac{z-4}{45/7}$$

$$R(-20/7, 9/7, -17/7)$$