TENSORES

Resumen de teoría sobre álgebra de tensores

www.thefiniteelement.com

Actualizado el 22/07/2012

1. Resumen sobre álgebra de tensores

1.1 Introducción

Las propiedades de un medio contínuo no cambian con el sistema de coordenadas y es por ello que las ecuaciones de la mecánica de medios continuos tienen forma tensorial. Nos interesa poder escribir las ecuaciones de forma que podamos describir un fenómeno físico a través de sus propiedades sin que éstas se vean afectadas por el cambio del sistema de coordenadas.

La necesidad de cambiar el sistema viene dada por la conveniencia de poder realizar integrales mucho más fácil en un sistema que en otro. Esto dependerá de la geometría que adopte el volumen, la superficie o la curva que nos interesa.

1.2 Simbología

α: números que van de 1 hasta la dimensión del espacio. Normalmente 2 o 3.

Z^α: coordenadas cartesianas. $Z^1 = x,\ Z^2 = y,\ Z^3 = z$.

θ^i: coordenadas generalizadas. Cilíndricas, esféricas, cilíndrico-parabólicas, polares, etc. También van de 1 hasta la dimensión del espacio. Cada θ^i puede tener su propio símbolo dependiendo del sistema de coordenadas, igual que hicimos con el cartesiano en el párrafo anterior.

$\underline{e_\alpha}$: bases del sistema de coordenadas cartesiano.

$\underline{g_i}$: bases del otro sistema de coordenadas.

1.3 Jacobiano de la transformación

Lo utilizaremos siempre como:

$$J = \frac{\partial Z^\alpha}{\partial \theta^i}$$

1.4 Convenio de suma de Einstein

Consiste en que se desarrollan solo los índices que están por pares. No aplica para nada más, solo aquellos que van en pares. Ejemplo:

$$\underline{g_i} = \frac{\partial Z^\alpha}{\partial \theta^i}\underline{e_\alpha}$$

Queda:

$$\underline{g_i} = \frac{\partial Z^1}{\partial \theta^i}\underline{e_1} + \frac{\partial Z^2}{\partial \theta^i}\underline{e_2} + \frac{\partial Z^3}{\partial \theta^i}\underline{e_3}$$

Pero el término que queda en i también se desarrolla, solo que en ecuaciones diferentes:

$$\underline{g_1} = \frac{\partial Z^1}{\partial \theta^1}\underline{e_1} + \frac{\partial Z^2}{\partial \theta^1}\underline{e_2} + \frac{\partial Z^3}{\partial \theta^1}\underline{e_3}$$

$$\underline{g}_2 = \frac{\partial Z^1}{\partial \theta^2}\underline{e}_1 + \frac{\partial Z^2}{\partial \theta^2}\underline{e}_2 + \frac{\partial Z^3}{\partial \theta^2}\underline{e}_3$$

$$\underline{g}_3 = \frac{\partial Z^1}{\partial \theta^3}\underline{e}_1 + \frac{\partial Z^2}{\partial \theta^3}\underline{e}_2 + \frac{\partial Z^3}{\partial \theta^3}\underline{e}_3$$

1.5 Transformación de bases

Para transformar una base en coordenadas generalizadas, covariante o contravariante, en términos de las bases en el sistema cartesiano.

$$\underline{g}_i = \frac{\partial Z^\alpha}{\partial \theta^i}\underline{e}_\alpha$$

$$\underline{g}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial Z^\alpha}\underline{e}^\alpha$$

Para transformar las bases cartesianas, covariantes y contravariantes, en términos de las bases en el otro sistema coordenado que nos interesa.

$$\underline{e}_\alpha = \frac{\partial \theta^i}{\partial Z^\alpha}\underline{g}_i$$

$$\underline{e}^\alpha = \frac{\partial Z^\alpha}{\partial \theta^i}\underline{g}^i$$

1.6 La métrica

Las siguientes son solo las componentes del tensor métrico, que son las que normalmente interesan:

$$g_{ij} = \underline{g}_i \cdot \underline{g}_j$$

$$g^{ij} = \underline{g}_i \cdot \underline{g}_j$$

El anterior es un producto escalar (punto). g_{ij} no lleva raya porque son las componentes. Componentes de una matriz o del tensor de orden 2 que es el tensor métrico.

1.7 Campos vectoriales

Un campo vectorial se define en términos de sus componentes y sus bases, así:

$$\underline{v} = v^i \underline{g}_i = v_i \underline{g}^i$$

Componente contravariante (super-índice) con base covariante (subíndice) o componente covariante con base contravariante. Son iguales, así que escribir un campo vectorial de una forma o de la otra igual conserva la invariancia del campo con el cambio del sistema de coordenadas.

1.8 Derivada de un tensor de orden 1 (de un campo vectorial)

No se puede derivar un tensor en forma ordinaria. La derivada de un tensor será un tensor solo cuando los cambios de coordenadas estén restringidos a transformaciones lineales. Por eso se utilizan los símbolos de Christoffel. Solo los símbolos de Christoffel segunda especie producen tensores generales, por eso son los más importantes.

$$\underline{v} = v^i \underline{g}_i = v_i \underline{g}^i$$

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial \theta^n} = v^i|_n \, \underline{g}_i = v_i|_n \, \underline{g}^i$$

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial \theta^n} = \left(\frac{\partial v^i}{\partial \theta^n} + v^s \Gamma^i_{sn}\right) \underline{g}_i = \left(\frac{\partial v_i}{\partial \theta^n} - v_s \Gamma^s_{in}\right) \underline{g}^i$$

Símbolos de Christoffel de 2ª especie:

$$\Gamma^i_{sn} = \frac{\partial^2 Z^\alpha}{\partial \theta^s \partial \theta^n} \frac{\partial \theta^i}{\partial Z^\alpha}$$

$$\Gamma^s_{in} = \frac{\partial^2 Z^\alpha}{\partial \theta^i \partial \theta^n} \frac{\partial \theta^s}{\partial Z^\alpha}$$

Quedando así todo en términos de derivadas parciales que se pueden calcular con las herramientas de cálculo diferencial que ya se conocen. Si tenemos 3 dimensiones el índice p también tiene 3 números. Esto equivaldría a que los símbolos de Christoffel de segunda especie componen una matriz de 3 dimensiones de 3x3x3.

1.9 Gradiente de un tensor en general

El tensor, que en general puede tener componentes mixtas, además de solo covariantes o contravariantes, es:

$$\boldsymbol{v} = v^{ij\ldots k}_{pq\ldots r} \underline{g}_i \underline{g}_j \ldots \underline{g}_k \, \underline{g}^p \underline{g}^q \ldots \underline{g}^r$$

El gradiente es:

$$\underline{\nabla} \boldsymbol{v} = \underline{g}^n \frac{\partial}{\partial \theta^n}$$

1.10 Gradiente de tensor de primer orden (un campo vectorial)

$$\underline{\nabla} \, \underline{v} = v^p|_n \, \underline{g}^n \underline{g}_p = v_p|_n \, \underline{g}^n \underline{g}^p$$

1.11 Componentes físicas

Se empleará la teoría de tensores para describir fenómenos físicos y hacer que las bases tengan magnitud 1, haciéndolas dimensionalmente homogéneas. En general, los vectores base no tienen módulo unitario ni son dimensionalmente homogéneos.

Las componentes físicas están definidas solo para sistemas ortogonales, es decir:

$$g^{ij} = g_{ij} = 0 \quad si \quad i \neq j$$

Se logra introduciendo la magnitud del vector base en el numerador y el denominador, así:

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{3} v^i \sqrt{g_{ii}}\, \frac{\underline{g_i}}{\sqrt{g_{ii}}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{v_i}{\sqrt{g_{ii}}} \sqrt{g_{ii}}\, \underline{g}^i = \sum_{i=1}^{3} \frac{v_i}{h_i} h_i \underline{g}^i = \sum_{i=1}^{3} v^i h_i \frac{\underline{g_i}}{h_i} = v_{<i>} \underline{\hat{g}_i} = v^i \underline{g_i} = v_i \underline{g}^i$$

Se utiliza el símbolo de sumatoria para aclarar que hay suma sobre todos los términos, ya que el convenio de sumatoria de Einstein es para índices repetidos una sola vez, no 3 o 5 veces como se muestra arriba.

$$Factor\ de\ escala \quad h_i = \left|\underline{g_i}\right| = \left|\underline{g}^i\right|^{-1} = \sqrt{g_{ii}} \quad (sin\ suma\ en\ i)$$

$$Componentes\ físicas \quad v_{<i>} = v^i \sqrt{g_{ii}} = v^i h_i = \frac{v_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{v_i}{h_i} \quad (sin\ suma\ en\ i)$$

$$Base\ unitaria \quad \underline{\hat{g}_i} = \frac{\underline{g_i}}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{\underline{g_i}}{h_i} = \sqrt{g_{ii}}\, \underline{g}^i = h_i \underline{g}^i \quad (sin\ suma\ en\ i)$$

$$\left|\frac{\underline{g_i}}{\sqrt{g_{ii}}}\right| = 1 \quad (sin\ suma\ en\ i)$$

Esto puede extenderse a tensores de orden mayor a 1. Al término $v_{<i>}$ se le llama la componente física del tensor $\underline{v}$. Estas componentes no son tensores y por lo tanto no transforman como tales. Es decir, son particulares para cada sistema de coordenadas. h_i es el módulo o magnitud de $\underline{g_i}$.

1.12 Derivada de una base unitaria en componentes físicas

Para $i = j$:

$$\frac{\partial \underline{\hat{g}_i}}{\partial \theta^i} = -\frac{1}{h_j}\frac{\partial h_i}{\partial \theta^j} \underline{\hat{g}_j} - \frac{1}{h_k}\frac{\partial h_i}{\partial \theta^k} \underline{\hat{g}_k} \quad (No\ sumar. i, j, k, todos\ diferentes)$$

Para $i \neq j$:

$$\frac{\partial \underline{\hat{g}_i}}{\partial \theta^j} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_j}{\partial \theta^i} \underline{\hat{g}_j} \quad (No\ suma. i, j, diferentes)$$

1.13 Gradiente de un vector en componentes físicas

$$\underline{\nabla}\, \underline{v} = \underline{g}^i \frac{\partial \underline{v}}{\partial \theta^i} = \frac{\underline{\hat{g}_i}}{h_i} \frac{\partial \left(v_{<j>} \underline{\hat{g}_j}\right)}{\partial \theta^i} \quad (suma\ sobre\ i, j)$$

1.14 Divergencia de un vector en componentes físicas

$$\underline{\nabla}.\underline{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \theta^1}(h_2 h_3 v_{<1>}) + \frac{\partial}{\partial \theta^2}(h_1 h_3 v_{<2>}) + \frac{\partial}{\partial \theta^3}(h_1 h_2 v_{<3>})\right]$$

1.15 Rotor de un vector en componentes físicas

$$\underline{\nabla}\ x\ \underline{v} = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_3 v_{<3>})}{\partial\theta^2} - \frac{\partial(h_2 v_{<2>})}{\partial\theta^3}\right]\underline{\hat{g}}_1 + \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(h_2 v_{<2>})}{\partial\theta^1} - \frac{\partial(h_1 v_{<1>})}{\partial\theta^2}\right]\underline{\hat{g}}_3 + \frac{1}{h_1 h_3}\left[\frac{\partial(h_1 v_{<1>})}{\partial\theta^3} - \frac{\partial(h_3 v_{<3>})}{\partial\theta^1}\right]\underline{\hat{g}}_2$$

1.16 Laplaciano en componentes físicas

De un campo escalar:

$$\underline{\nabla}^2 f = \underline{\nabla}.\left(\underline{\nabla} f\right) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\theta^1}\left(h_2 h_3 \underline{\nabla} f_{<1>}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta^2}\left(h_1 h_3 \underline{\nabla} f_{<2>}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta^3}\left(h_1 h_2 \underline{\nabla} f_{<3>}\right)\right]$$

Gran parte de la teoría resumida aquí puede hallarse demostrada y analizada a fondo en el libro Nonlinear Continua, con Eduardo Dvorkin y Marcela Goldschmit como autores, anexo A. Buena parte del tema de componentes físicas se halla en el libro Introduction to Continuum Mechanics de Malvern.